

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Н.В. Білицька, О.Г. Гетьман

ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА

РОЗДІЛ: НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ **Курс лекцій для дистанційного режиму навчання**

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «Тепло- і парогенеруючі установки»
спеціальності 142 «Енергетичне машинобудування»,
за освітньою програмою «Атомні електричні станції»,
спеціальності 143 «Атомна енергетика»,
за освітньою програмою «Теплофізика»
спеціальності 144 «Теплоенергетика»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

Рецензенти: *Ботвіновська Світлана Іванівна*, докт. техн. наук, проф.
Баишта Олена Трифонівна, канд. техн. наук, проф.

Відповідальний
редактор *Гнітецька Тетяна Віталіївна*, канд. техн. наук, доц.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 6 від 25.02.2021 р.)
за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету (протокол № 12 від 22.02.2021 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

Білицька Надія Василівна, канд. техн. наук, доц.
Гетьман Олександра Георгіївна, канд. техн. наук, доц.

ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА

РОЗДІЛ: НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

Курс лекцій для дистанційного режиму навчання

ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА. Розділ: Нарисна геометрія. Курс лекцій для дистанційного режиму навчання [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальностей 142 «Енергетичне машинобудування», 143 «Атомна енергетика», 144 «Теплоенергетика» /Н.В. Білицька, О.Г. Гетьман; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 39,6 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 171 с.

© Н.В. Білицька, О.Г. Гетьман 2021
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021

Навчальний посібник «Інженерна графіка» орієнтований на застосування в режимі дистанційного навчання. Оскільки традиційне читання лекцій в умовах карантину є неможливим, пропонується надання такої інформації за допомогою платформи ZOOM. Це сприймається значно складніше, ніж при безпосередньому спілкуванні викладача зі студентами. Викладач не може спостерігати миттєву реакцію студентів на матеріал, який викладається. Крім того, значно ускладнюється процес послідовної побудови розв'язку складних геометричних задач.

Але надання матеріалу у вигляді, що пропонується авторами, допускає можливість діалогу зі студентами, сприяє інтенсифікації самостійної роботи. Якість креслеників, які пропонуються на лекціях, значно вища за їх надання за традиційним варіантом: вони виконані за допомогою комп'ютерного графічного пакета.

У навчальному посібнику наведені презентації лекцій з курсу інженерної графіки, які виконані у програмі Microsoft PowerPoint.

В презентаціях застосовуються чисельні кольорові ілюстрації геометричних об'єктів та їх можливих взаємних положень, що розглядаються в курсі. На початку кожної лекції наведені основні питання, які розглядаються в лекції. Основні положення та визначення виділені кольором, та ілюструються кількома прикладами. Наприкінці лекції наведені висновки.

Для організації самостійної роботи студентів над курсом розроблені «Навчальні завдання з нарисної геометрії та інженерної графіки», користуючись якими студенти закріплюють лекційний матеріал. Цьому також сприяє блок відеороликів, які розроблені за усіма темами посібника.

Вся інформація з вивчення курсу «Інженерна графіка» надана на платформі дистанційного навчання «Сікорський»

Навчальний посібник призначений для студентів технічних спеціальностей.

Зміст

Вступ	5
1. Лекція 1. Метод проєкціювання. Моделювання точки.	
Метод заміни площин проєкцій	7
Питання та завдання для самоперевірки	19
2. Лекція 2. Моделювання прямої лінії.	20
Питання та завдання для самоперевірки	32
3. Лекція 3. Моделювання площини	33
Питання та завдання для самоперевірки	49
4. Лекція 4. Поверхні	50
Питання та завдання для самоперевірки	68
5. Лекція 5. Аксонометрія	69
Питання та завдання для самоперевірки	86
6. Лекція 6. Переріз поверхонь площинами. Розгортки.	87
Питання та завдання для самоперевірки	110
7. Лекція 7. Одинарне та подвійне проникання.	111
Питання та завдання для самоперевірки	145
8. Лекція 8. Перетин поверхонь.	146
Питання та завдання для самоперевірки	169
Література	170

Вступ

Цей навчальний посібник призначений для студентів, які вивчають курс нарисної геометрії за скороченою програмою у дистанційному режимі навчання.

Нарисна геометрія належить до дисциплін, що складають основу інженерної освіти. У цьому курсі вивчають методи зображень просторових форм на площині та способи графічного розв'язання позиційних та метричних задач за плоскими зображеннями об'єктів. Крім того, вивчення нарисної геометрії сприяє розвитку просторового уявлення, яке є необхідним для творчої діяльності будь-якого інженера. Тому засвоєння основ нарисної геометрії студентами має велике значення для їх наступної інженерної діяльності.

Оскільки традиційне читання лекцій в умовах карантину є неможливим, пропонується надання такої інформації за допомогою платформи ZOOM. Це сприймається значно складніше, ніж при безпосередньому спілкуванні викладача зі студентами. Викладач не може спостерігати миттєву реакцію студентів на матеріал, який викладається. Крім того, значно ускладнюється процес послідовної побудови розв'язку складних геометричних задач.

Але надання матеріалу у вигляді, що пропонується авторами, допускає можливість діалогу зі студентами, сприяє інтенсифікації самостійної роботи. Якість креслеників, які пропонуються на лекціях, значно вища за їх надання за традиційним варіантом: вони виконані за допомогою комп'ютерного графічного пакета.

У навчальному посібнику наведені презентації лекцій з курсу інженерної графіки, які виконані у програмі Microsoft PowerPoint.

В презентаціях застосовуються чисельні кольорові ілюстрації геометричних об'єктів та їх можливих взаємних положень, що розглядаються в курсі. На початку кожної лекції наведені основні питання, які розглядаються в лекції. Основні положення та визначення виділені кольором, та ілюструються кількома прикладами. Наприкінці лекції наведені висновки.

Посібник складений з урахуванням методичних посібників кафедри нарисної геометрії, інженерної та комп'ютерної графіки НТУУ “КПІ”: “Навчальні завдання з нарисної геометрії”/Уклад. О.М.Крот, Л.В.Петіна, М.С.Гумен; “Навчальні завдання з інженерної графіки” /Уклад. М.Д.Бевз, В.В.Ванін, Н.К.Віткуп; “Методичні вказівки і контрольні завдання з курсів “Нарисна геометрія” та “Інженерна графіка” /Уклад. Н.К.Віткуп, Н.А.Парахіна, Л.Д.Чорнощокіна, «Нарисна геометрія та інженерна графіка. Навчальні завдання для програмованого навчання. Навчальний посібник». /Уклад. Ванін В.В., Білицька Н.В., Гетьман О.Г., Міхлевська Н.В., «Короткий курс лекцій з інженерної

графіки для студентів немеханічних спеціальностей» /Уклад. Ванін В.В., Білицька Н.В., Гетьман О.Г., Міхлевська Н.В., а також з урахуванням посібника “Інженерна графіка” авторів В.В.Ваніна, В.В.Перевертун, Т.М.Надкерничної та ін.

Вивчення курсу здійснюється згідно з робочою програмою дисципліни. Для полегшення засвоєння матеріалу з кожної теми студенти виконують завдання, які складаються з розв'язку практичних задач.

Передбачається, що після кожної лекції студент самостійно виконує прості завдання (Домашні завдання) з теми, контролюючи засвоєння матеріалу, а в аудиторії на практичних заняттях під наглядом викладача розв'язує основні задачі (Аудиторні завдання) за навчальним посібником Ванін В.В., Білицька Н.В., Гетьман О.Г., Міхлевська Н.В. Навчальні завдання з нарисної геометрії та інженерної графіки для програмованого навчання студентів немеханічних спеціальностей.

Для закріплення засвоєного матеріалу студенти самостійно виконують розрахунково-графічну роботу.

У курсі прийняті такі позначення та умовності:

- точки позначають великими літерами латинського алфавіту A, B, C, \dots , а також цифрами $1, 2, 3, \dots$;
- прямі та криві лінії — малими літерами латинського алфавіту a, b, c, \dots ;
- площини — великими літерами грецького алфавіту $\Pi, \Delta, \Theta, \Sigma, \dots$;
- кути — малими літерами грецького алфавіту $\alpha, \beta, \gamma, \dots$.

Будемо позначати α — кут нахилу прямої та площини до горизонтальної площини проєкцій Π_1 ; β — кут нахилу прямої та площини до фронтальної площини проєкцій Π_2 ; γ — кут нахилу прямої та площини до профільної площини проєкцій Π_3 . Інші кути позначають $\phi, \psi, \delta, \dots$.

Проєкції точок, ліній та площин позначають такими ж літерами, як і самі об'єкти, але з індексами площин проєкцій, на яких побудоване зображення $A_1, B_1, C_1, \dots; A_2, B_2, C_2, \dots; A_3, B_3, C_3, \dots$.

Для відображення співвідношення між геометричними об'єктами застосовуються такі символи:

- | | |
|-------------------------------|---|
| \parallel — паралельність; | \square — прямий кут; |
| \cap — перетин; | \in — належність точки до іншого об'єкту; |
| $O/$ — дотик; | \subset — належність решти елементів |
| $\circ/$ — мимобіжність; | (ліній,...) до іншого об'єкту; |
| \perp — перпендикулярність; | $=$ — результат дії; |
| U — з'єднання точок; | $=$ — збіг геометричних об'єктів. |

Приклад умовного запису: $K = l \cap \Delta$.

Запис означає, що точка K є точкою перетину прямої l з площиною Δ .

Лекція 1. Метод проєкціювання. Моделювання точки. Метод заміни площин проєкцій

У лекції розглядається структура навчального курсу інженерної графіки в цілому, а також визначення предмета нарисної геометрії, задачі курсу нарисної геометрії та його структура. Наводяться історичні довідки.

Викладається основний метод нарисної геометрії – метод проєкціювання. Розглядаються властивості прямокутного проєкціювання, а також проєкціювання точки на три взаємно перпендикулярні площини. Надається поняття визначника точки. Розглянута побудова комплексного рисунка точки. Надані конструктивні прийоми побудови третьої проєкції точки за двома заданими. Розглядається положення точки щодо площин проєкцій та взаємне положення двох точок.

Наводяться приклади розв'язку деяких метричних та позиційних задач на побудову та визначення положення точки на комплексному рисунку.

Викладаються основи одного з найбільш універсальних методів перетворення проєкцій – метода заміни площин проєкцій.

ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА

Лекція 1.

Метод проєкціювання.

Моделювання точки.

Метод заміни площин проєкцій.

Основні питання

1. Предмет та завдання курсу.
2. Метод проєкціювання.
3. Проєкціювання точки на 3 взаємно перпендикулярні площини.
4. Комплексний кресленик точки.
5. Метод заміни площин проєкцій

Предмет та завдання курсу.

Створення будь-яких промислових виробів починається з розробки конструкторської документації. Традиційно ця документація розробляється у вигляді креслеників.

Мета курсу інженерної графіки дати студентам знання, уміння та навички з підготовки конструкторської документації, а також застосування апарата геометричного моделювання складних технічних форм на площині як бази для їх комп'ютерної візуалізації.

Інженерна графіка складається з двох дисциплін:

- нарисної геометрії
- технічного креслення.

Нарисна геометрія – це теоретична дисципліна, у якій просторові об'єкти вивчають за їх зображеннями на площині.

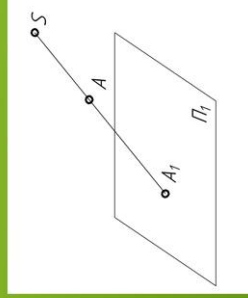
Технічне креслення – це практична дисципліна, яка застосовує методи нарисної геометрії для створення креслеників реальних технічних об'єктів та численні положення державних стандартів для спрощення їх зображення.

Метод проєкціювання

Основний геометричний об'єкт тривимірного простору – **точка**. Більш складні об'єкти можна уявити собі як сукупність точок, які складають геометричну фігуру.

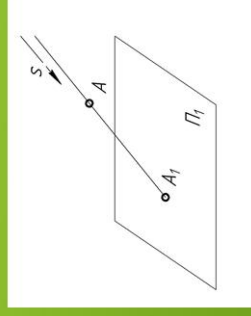
Основний метод побудови зображень просторових об'єктів – це **метод проєкціювання**. Існує два різновиди цього методу:

центральне проєкціювання



Π_1 – площина проєкції,
 S – центр проєкціювання
 A – об'єкт проєкціювання
 A_1 – проєкція точки A на площину Π_1
 $A-A_1$ – проєкціюючий промінь.

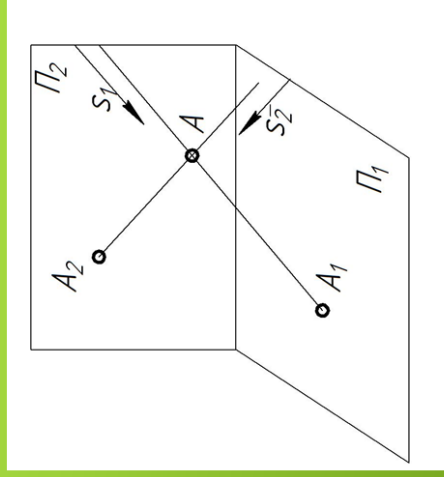
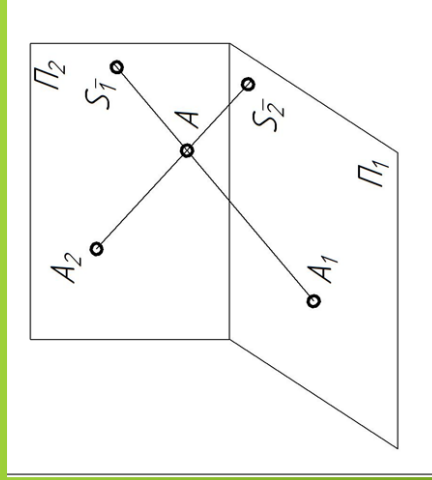
паралельне проєкціювання



Π_1 – площина проєкції,
 s – напрямок проєкціювання
 A – об'єкт проєкціювання
 A_1 – проєкція точки A на площину Π_1
 $A-A_1$ – проєкціюючий промінь.

Метод моделювання повинен дозволити однозначно будувати проєкції будь-яких об'єктів на площині. Це **пряма задача** нарисної геометрії. В обох різновидах вона має рішення. Але система, яка складається з площини проєкції та центру або напрямку проєкціювання повинна також давати можливість по зображенню однозначно відтворити об'єкт. Це **обернена задача**, для вирішення якої не вистачає однієї площини проєкції.

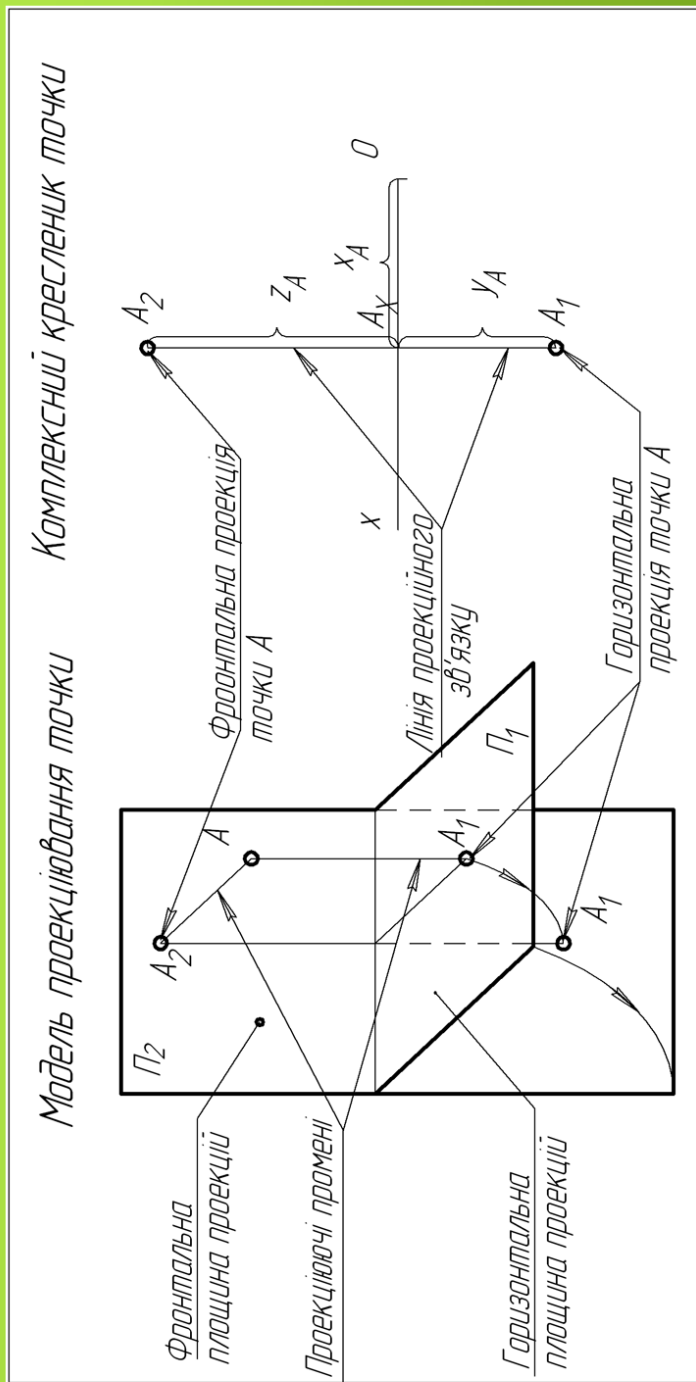
Для однозначного рішення оберненої задачі додають **ще одну площину проекцій Π_2** та ще один центр проєкціювання або напрям проєкціювання



В системі двох площин проекцій та двох центрів або напрямів проєкціювання об'єкт однозначно визначається на перетині двох проєкціюючих променів.

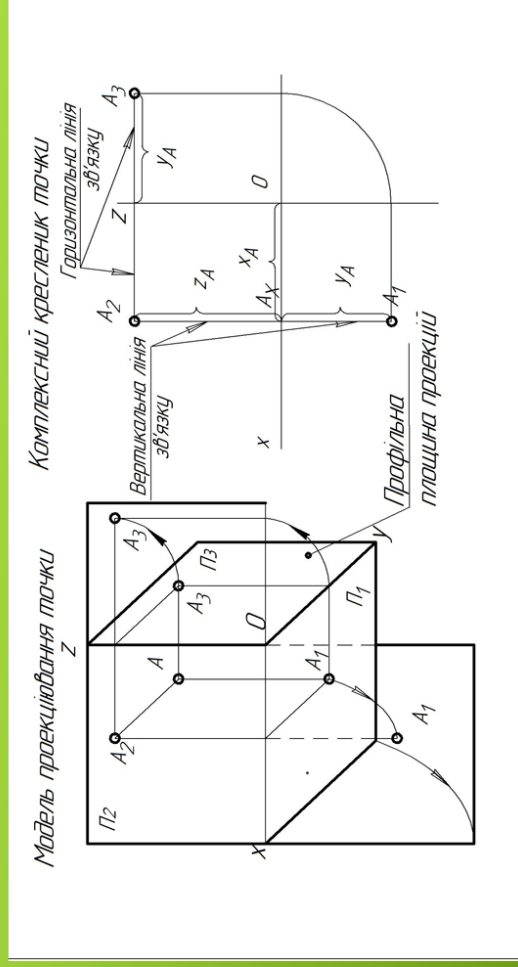
У машинобудівному кресленні застосовують паралельне проєкціювання. Якщо кут між напрямом проєкціювання s та площиною проекцій Π дорівнює 90° , то проєкціювання називають **ортогональним**.

В ортогональному проєкціюванні вводять дві площини проекцій: горизонтальну та вертикальну. Першу називають **горизонтальною площиною проекцій** та позначають Π_1 , другу – **фронтальною площиною проекцій** та позначають Π_2 . Напрями проєкціювання s_1 та s_2 розташовані перпендикулярно відповідним площинам. Точки перетину проєкціюючих променів з площинами проекцій називаються **проєкціями точки**: A_1 – горизонтальна, а A_2 – фронтальна проєкції точки A .



Для отримання плоского кресленка видалимо об'єкт проєкціювання – точку A та проєкціюючі промені $A-A_1$ й $A-A_2$.
 Фронтальна площина проєкції P_2 спільно з фронтальною проєкцією точки A_2 вважається нерухомою.
 Обернемо площину P_1 спільно з горизонтальною проєкцією точки A_1 навколо лінії її перетину з P_2 до суміщення з площиною P_2 .
 Таким чином утворюється **комплексний кресленок або епюр точки**.

Проекціювання точки на 3 взаємно перпендикулярні площини.



Дві проєкції точки визначають її положення у просторі, але іноді вони незручні в користуванні. Тому вводять третю площину, яка перпендикулярна до обох попередніх. Її називають **профільною площиною проєкцій** та позначають Π_3 .

Декартову систему координат суміщують з системою площин проєкцій, тоді можна об'єднати інформацію про положення точки у просторі, що задана координатами $A(x_A, y_A, z_A)$, та ту, що задана проєкціями точки $A(A_1, A_2)$, або $A(A_2, A_3)$.

Кожна з проєкцій задається двома координатами $A_1(x_A, y_A)$, $A_2(x_A, z_A)$, $A_3(y_A, z_A)$, а сукупність двох проєкцій дозволяє визначити всі 3 координати.

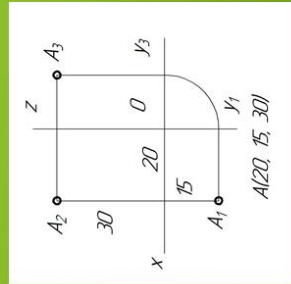
Таким чином третя проєкція точки залежна від двох попередніх і може бути побудована по заданих двом проєкціях.

Проекції точки з'єднуються **лініями зв'язку**: горизонтальною A_2-A_3 і вертикальною A_1-A_2 . Їх довжини дорівнюють сумі двох координат $A_1-A_2 = y_A + z_A$, $A_2-A_3 = x_A + y_A$.

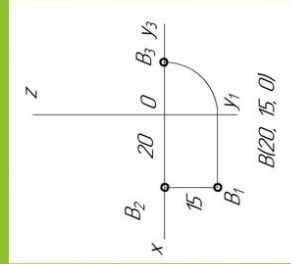
Комплексний кресленик точки

Розглянемо розв'язок прямої та оберненої задачі на комплексному кресленні.

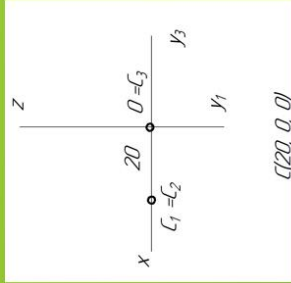
Пряма задача. Задані точки А, В, С, D.
Побудувати їх проекції на комплексному кресленні. Визначити положення у просторі.



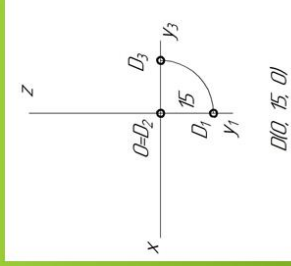
Точка **A(20, 15, 30)**:
 $x_A \neq 0, y_A \neq 0, z_A \neq 0$.
Точка у просторі.
Її проекції належать площинам проекцій.



Точка **B(20, 15, 0)**:
одна координата **$z_B = 0$** .
Точка розташована у тій площині, відстань до якої дорівнює 0 – у площині **Π_1** . Вє **Π_1** . Дві її проекції на осях, а третя – у площині проекції.



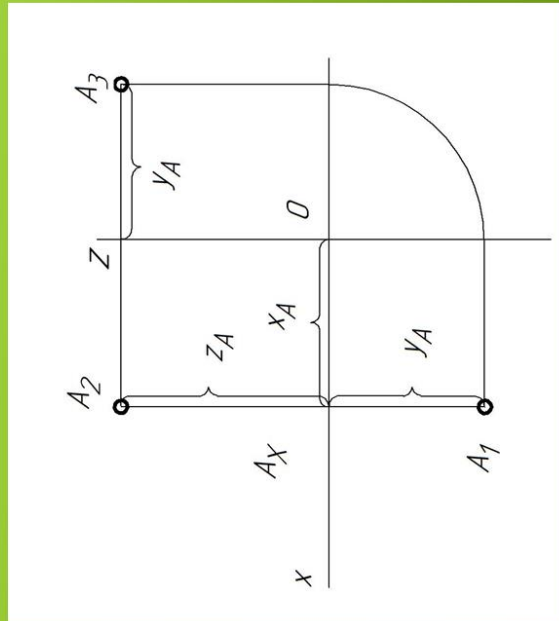
Точка **C(20, 0, 0)**:
дві координати **$y_A = 0, z_B = 0$** .
Точка розташована на тій осі, координата по якій не дорівнює 0 – на осі **Ox**.
Сє **Ox**. Дві її проекції на осі, а третя – у початку координат.



Точка **D(0, 15, 0)**:
дві координати **$x_D = 0, z_D = 0$** .
Точка розташована на тій осі, координата по якій не дорівнює 0 – на осі **Oy**.
Дє **Oy**. Дві її проекції на осі **$D_1 \in y_1, D_3 \in y_3$** , а третя – у початку координат.

Обернена задача.

Заданий комплексний кресленик точки. Визначити її координати.



Слід виміряти координати точки по наведеній схемі. Усі координати вимірюються у міліметрах, та одиниця вимірювання не вказується.

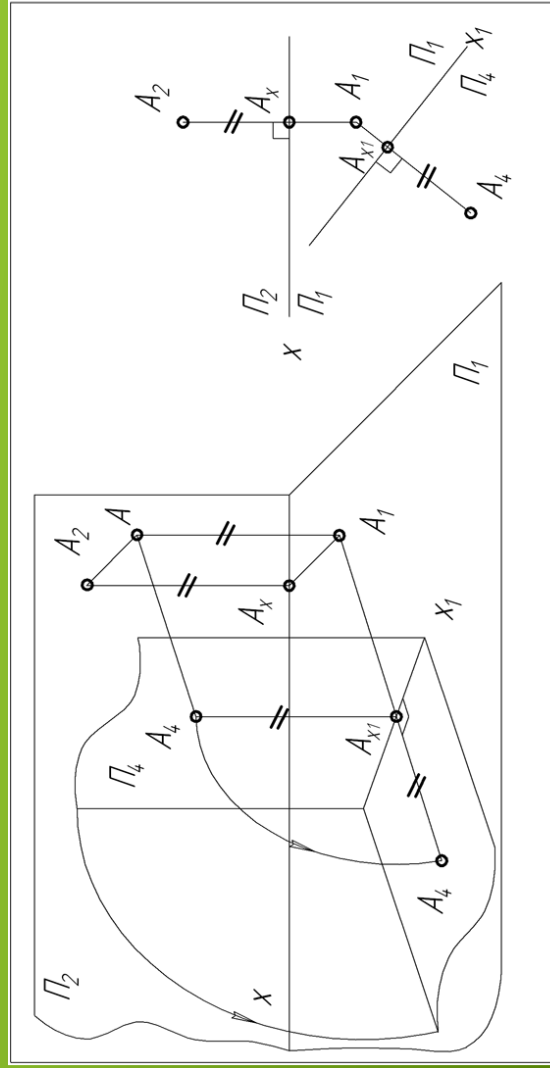
Визначені координати записуються в певному порядку $A(x_A, y_A, z_A)$. Це **визначник точки**.

Точка може бути задана своїми проєкціями $A(A_1, A_2)$, або $A(A_2, A_3)$. Цей запис також є **визначником точки**.

Зверніть увагу на те, що відрізки ліній проєкційного зв'язку складаються з суми двох координат

Метод заміни площин проекцій

Незважаючи на те, що дві проекції точки однозначно визначають її положення у просторі, а ми вже ввели додаткову профільну площину проекцій, все ж часом виникає потреба в інших, зручніше розташованих площинах проекцій. Для збереження усіх закономірностей, які ми розглянули раніше, застосування додаткових площин проекцій повинно дотримуватись низки правил.



1. На одному етапі перетворень завжди вводиться лише **одна нова** площина проекцій, а друга зберігається стара.
2. Нова площина проекцій завжди розташована **перпендикулярно** збереженій старій.
3. Нова проекція точки й збережена стара завжди розташовані на **одній лінії зв'язку**, яка перпендикулярна новій осі.
4. Відстань від нової проекції точки до нової осі дорівнює відстані від відкинutoї проекції точки до відкинutoї осі.

Висновки

1. Конструкторська документація розробляється у вигляді креслеників, які виконуються на аркушах паперу у відповідності з умовами та спрощеннями, що регламентуються державними стандартами.
2. Моделювання просторових геометричних об'єктів на площині здійснюється методом проєкціювання.
3. У машинобудуванні застосовується ортогональне проєкціювання.
4. Дві проєкції точки однозначно визначають її положення у просторі.
5. Визначник точки - $A(x_A, y_A, z_A)$, або дві її проєкції - $A(A_1, A_2)$, або $A(A_2, A_3)$.
6. Проєкції точки з'єднуються **лініями зв'язку**, які завжди перпендикулярні осям, що їх розділяють.
7. Для розв'язку складних задач застосовується метод заміни площин проєкцій.

Питання та завдання для самоперевірки

1. Який основний метод нарисної геометрії?
2. Які існують методи проєкціювання?
3. Скільки проєкцій точки визначають її положення в просторі?
Наведіть приклад визначника будь-якої точки.
4. Які основні площини проєкцій застосовуються в інженерній графіці?
5. У чому полягає метод заміни площин проєкцій?
6. Як вводиться нова площина проєкцій?

Лекція 2. Моделювання прямої лінії

У лекції розглядається побудова комплексного рисунка прямої лінії, її визначник. Наведені приклади взаємного положення прямої і точки. Розглянута класифікація прямих за їх розташуванням відносно площин проєкцій. Наведені приклади прямих окремого положення щодо площин проєкцій (прямі рівня та проєкціюючі прямі).

Розглянуті основні положення способу заміни площин проєкцій при перетворенні прямих. Наведені алгоритми перетворення прямої загального положення в пряму рівня та перетворення прямої загального положення в пряму проєкціюючу. Виконаний розв'язок задач на визначення натуральної величини відрізка прямої та кутів нахилу його до площин проєкцій.

Розглядається взаємне положення двох прямих: прямі, що перетинаються, паралельні прямі, мимобіжні прямі.

Наведені приклади розв'язку основних позиційних і метричних задач.

ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА

Лекція 2.

Моделювання прямої лінії.

Основні питання

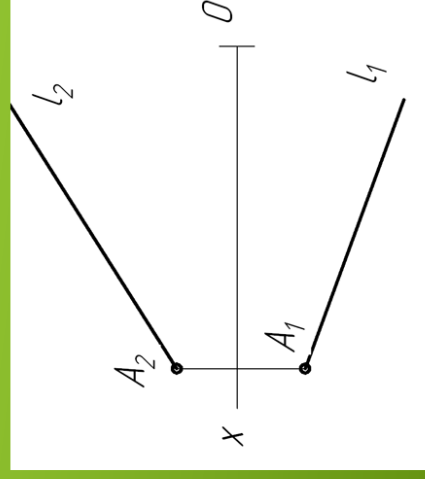
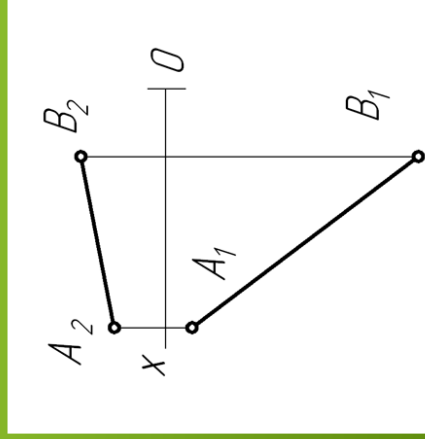
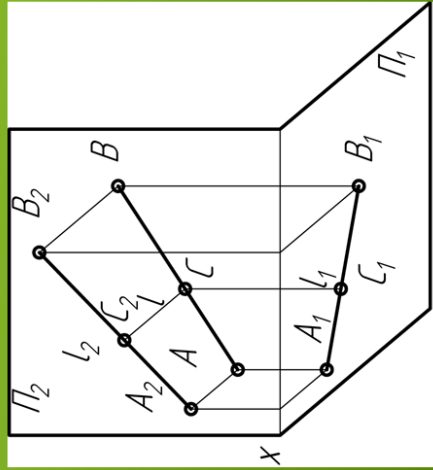
1. Задання прямої лінії на комплексному кресленнику.
2. Належність точки прямій лінії.
3. Взаємне положення точки и прямої.
4. Ділення відрізка прямої в заданому відношенні.
5. Класифікація прямих ліній за положенням у просторі
6. Перетворення прямої лінії.
7. Взаємне положення двох прямих.

Задання прямої лінії на комплексному кресленнику.

Пряма задається у просторі **променем** або **відрізком**.

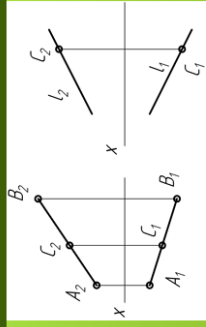
Визначником прямої у просторі є дві точки. Умовний запис визначника прямої: **$AB(A, B)$** . На комплексному кресленнику пряма може бути визначена таким чином:

$AB(A_1B_1, A_2B_2)$ або **$l(l_1, l_2)$**

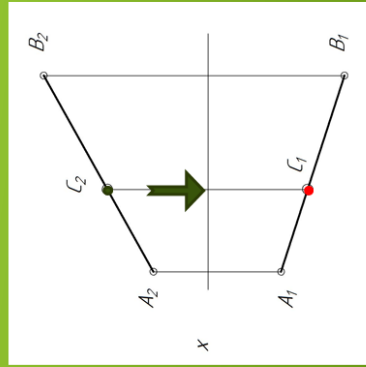


Належність точки прямій лінії.

Якщо точка належить прямій, то її проекції належать **однойменним проєкціям** цієї прямої і навпаки. Перевірка виконується по двом площинам проєкції.



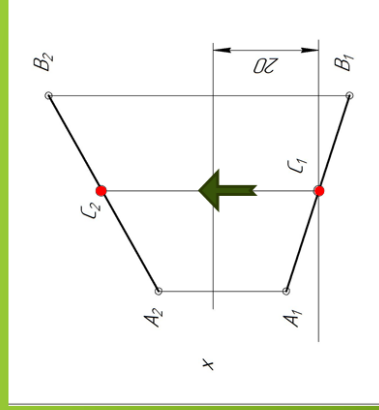
Приклад 1. Точка С належить прямій АВ. По заданій фронтальній проєкції C_2 визначити її горизонтальну проєкцію C_1 .



Розв'язок:

1. Від C_2 проводимо вертикальну лінію проєкційного зв'язку.
2. На перетині цієї лінії з горизонтальною проєкцією A_1B_1 прямої АВ розташована горизонтальна проєкція C_1 точки С.

Приклад 2. На прямій АВ побудувати точку С з координатою $y=20$.



Розв'язок:

1. На площині Π_1 проведимо горизонтальну пряму на відстані 20 мм від осі Ох.
2. На її перетині з горизонтальною проєкцією A_1B_1 визначимо горизонтальну проєкцію C_1 .
3. Фронтальна проєкція C_2 визначається на перетині вертикальної лінії проєкційного зв'язку із фронтальною проєкцією A_2B_2 .

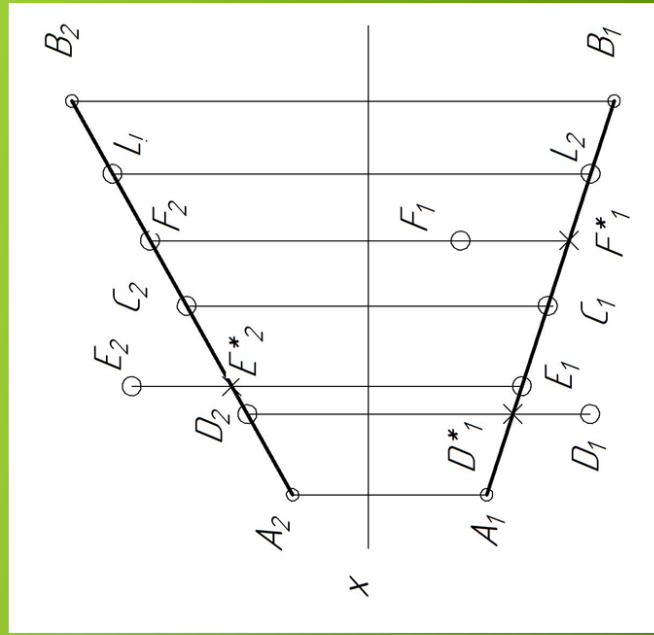
Взаємне положення точки і прямої.

Точка може належати прямій AB , як, наприклад, точка C , або не належати їй. Але розрізняють деякі особливі положення точки і прямої.

Точка D : Фронтальна проекція точки D_2 належить фронтальній проекції A_2B_2 прямої AB . А горизонтальна проекція D_1 розташована нижче горизонтальної проекції A_1B_1 прямої. Координата y_D більша ніж y_{D^*} точки D^* , яка належить AB . У такому випадку вважають, що точка D розташована **перед** прямою AB .

Точка E : Горизонтальна проекція E_1 точки належить горизонтальній проекції A_1B_1 прямої, а фронтальна E_2 розташована вище фронтальної проекції A_2B_2 прямої. Її координата z_E більша, ніж z_{E^*} , точки E^* , яка належить AB . У такому випадку вважають, що точка E розташована **над** прямою AB .

Точка F : Фронтальна проекція точки F_2 належить фронтальній проекції A_2B_2 прямої AB . А горизонтальна проекція F_1 точки F розташована вище горизонтальної проекції A_1B_1 прямої. Координата y_F менша, ніж y_{F^*} , точки F^* , яка належить AB . У такому випадку вважають, що точка D розташована **за** прямою AB .



Точка L : Її фронтальна проекція L_2 належить горизонтальній проекції A_1B_1 прямої, а горизонтальна проекція L_1 - навпаки фронтальній A_2B_2 . Точка L не належить прямій AB . Не виконана умова одностійності.

Ділення відрізка прямої в заданому відношенні

На практиці доводиться ділити відрізок прямої у заданому відношенні.

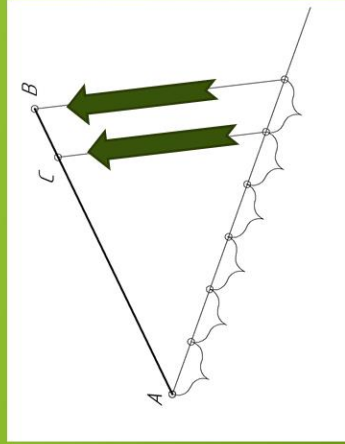
Розв'язок цієї задачі базується на наступному положенні.

Якщо точка ділить відрізок у деякому відношенні, то будь-яка її проекція ділить однойменну проекцію відрізка у тому ж відношенні.

То ж достатньо розділити одну проекцію відрізка у заданому відношенні та побудувати інші її проекції за лініями проекційного зв'язку.

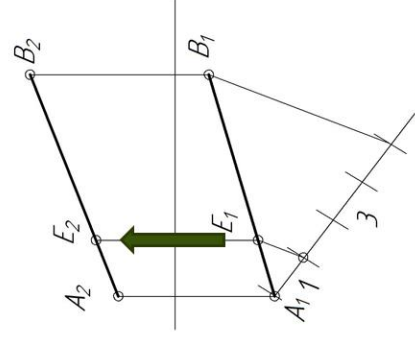
Приклад. Розділімо відрізок **AB**

у відношенні 5/1. Для графічного розв'язку задачі побудуємо довільний промінь, що виходить з кінця відрізка, та відкладемо на ньому $5+1=6$ рівних відрізків довільної довжини. З'єднаємо кінець останнього відкладеного відрізка з кінцем заданого.



Розв'язок задачі
на комплексному кресленку

*Поділувати точку E ,
яка ділить відрізок AB
у відношенні 1:3*



Через кінець п'ятого відрізка проведемо пряму, що паралельна побудованій. Її перетин з **AB** визначить шукану точку **C**.

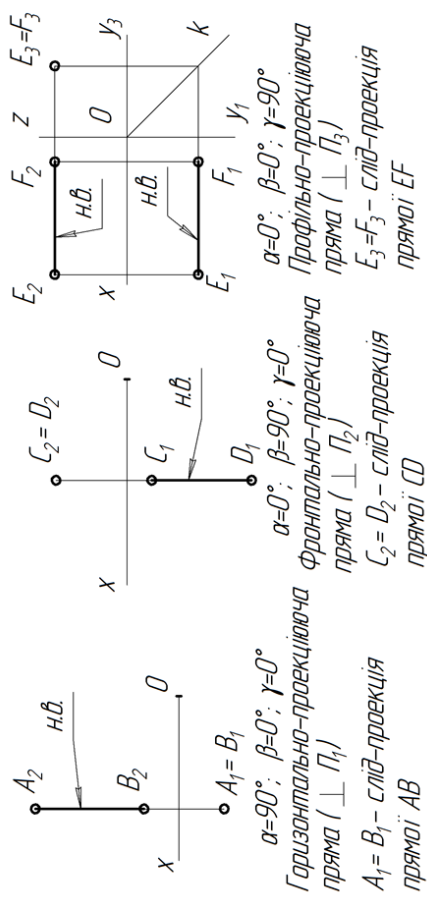
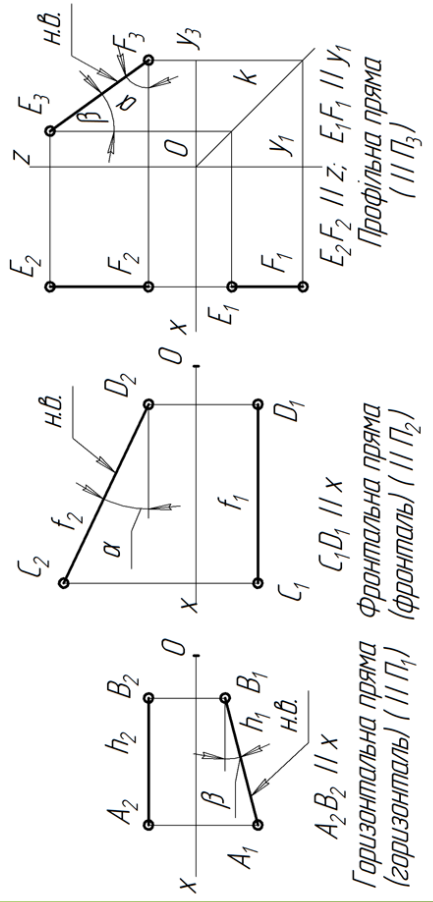
Класифікація прямих ліній за положенням у просторі

Залежно від розташування відносно площин проекцій прямі розподіляються на прямі **загального положення** та прямі **окремого положення**.

Пряма, що довільно розташована по відношенню до площин проекцій, називається прямою загального положення.

Прямі окремого положення, які паралельні до однієї з площин проекцій, називаються **прямими рівня**

Прямі, які перпендикулярні до однієї з площин проекцій, називають **проекціючими**.



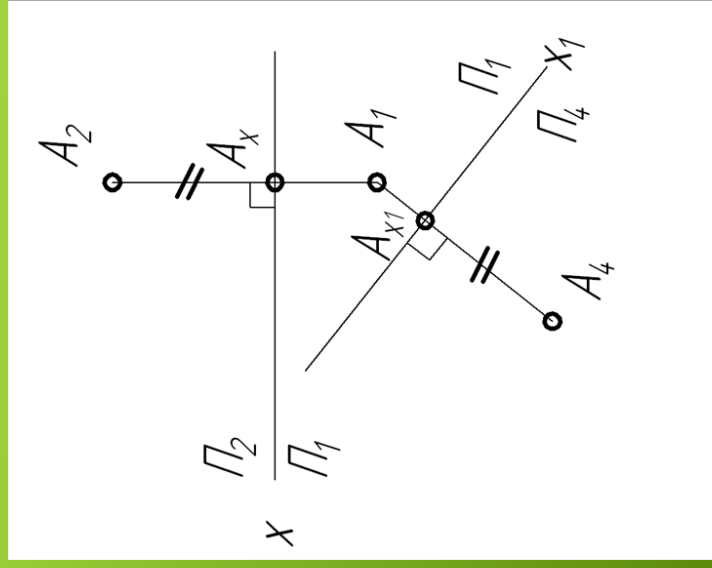
На кресленнях прямих окремого положення дозволяють визначати натуральні відрізки прямих та кутів їх нахилу до площин проекцій. Прямі загального положення проєкціюються на площини проєкцій спотворено, тому їх кресленики не надають такої інформації. Для визначення натуральних величин відрізків прямих загального положення та кутів їх нахилу до площин проекцій застосуємо метод заміни площин проекцій.

Перетворення прямої лінії.

Розв'язання багатьох задач можна значно спростити, якщо розглянути задані об'єкти в іншій системі площин проекцій. Перехід від однієї системи площин проекцій до іншої здійснюється відповідно загальним положенням методу заміни площин проекцій.

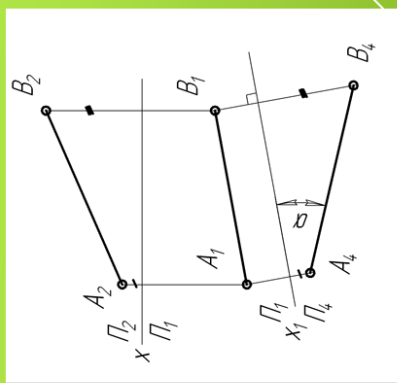
Основні положення методу заміни площин проекцій

1. Вводимо завжди тільки одну нову площину проекцій (Π_4), яка має бути перпендикулярною до тієї площини проекцій (Π_1), що залишається в системі.
2. На рисунку з'являється нова вісь x_1 як результат перетину нової площини проекцій Π_4 та площини проекцій Π_1 , що залишається в системі.
3. Відстань від нової проекції точки (A_4) до нової осі (x_1) дорівнює відстані від проекції точки, що замінюється (A_2), до попередньої осі (x). Тобто, при заміні фронтальної площини проекцій незмінною є координата z , а при заміні горизонтальної площини проекцій Π_1 на Π_5 — координата y .
4. Проекція точки у новій системі площин проекцій розташована на лінії зв'язку, яка перпендикулярна до нової осі проекцій.



Методом заміни площин проекцій розв'язуються задачі на визначення натуральних величин відрізків прямих, плоских фігур, кутів тощо.

Визначення довжини відрізка прямої загального положення та кутів нахилу α та β , які пряма утворює з площинами проекцій Π_1 та Π_2 .



1. Перетворити пряму загального положення у пряму рівня.

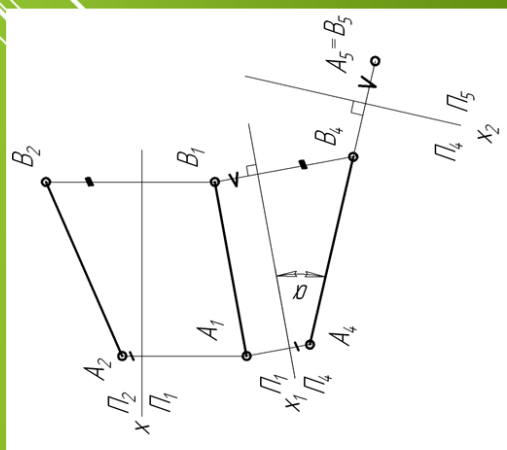
Нехай у системі площин проекцій Π_2/Π_1 визначена пряма загального положення **AB**. Перетворимо її в лінію рівня. Для цього введемо нову площину проекцій Π_4 паралельно до прямої **AB** ($\Pi_4 \parallel \mathbf{AB}, x_1 \parallel \mathbf{A_1B_1}$). На площині проекцій Π_4 показаний кут α нахилу прямої **AB** до Π_1 . Довжина відрізка A_4B_4 дорівнює натуральній величині відрізка **AB**.

Для визначення кута β нахилу прямої до Π_2 необхідно здійснити іншу заміну площин проекцій. Вводимо $\Pi_5 \perp \Pi_2$ та $\Pi_5 \parallel \mathbf{AB}, (x_2 \parallel \mathbf{A_2B_2})$.

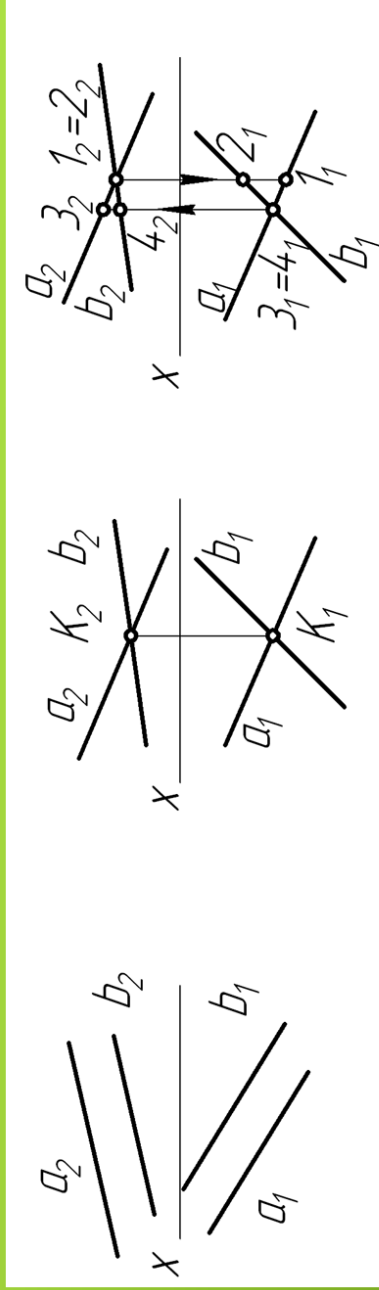
2. Перетворити пряму загального положення в проекцію.

Послідовною заміною двох площин проекцій виконуються такі дії:
— перетворюємо пряму загального положення в пряму рівня (див.п.1);
— лінію рівня перетворюємо в проекцію прямої.

Після перетворення прямої загального положення в пряму рівня нову площину проекцій вибираємо перпендикулярно до лінії рівня. Тоді в системі площин проекцій Π_4/Π_5 пряма **AB** буде проекціюючою. На епюрі вісь x_2 нової системи площин проекцій проводимо під прямим кутом до проекції **A₄B₄** прямої на ту площину проекцій, якій пряма паралельна.



Взаємне розташування двох прямих



Дві прямі у просторі можуть перетинатися, бути паралельними або мимобіжними.

Паралельні прямі належать одній площині та не мають жодної спільної точки. Однойменні проекції паралельних прямих також паралельні.

Прямі, що перетинаються, також належать площині, але мають одну спільну точку. Їх проекції перетинаються, а точки перетину однойменних проекцій знаходяться у проекційному зв'язку.

Мимобіжні прямі не належать одній площині. Проекції мимобіжних прямих можуть перетинатися, але між точками перетину проекцій немає проекційного зв'язку.

У цьому випадку точки перетину проекцій — це проекції двох різних точок, що знаходяться на одному проєкціючому промені. Наприклад, точки 1 і 2 знаходяться на одному фронтально-проєкціючому промені, а 3 і 4 — на одному горизонтально-проєкціючому. Такі точки називаються **конкуруючими**. Вони застосовуються для визначення видимості геометричних об'єктів.

Висновки

1. Якщо точка належить прямій, то її проекції належать **однойменним проекціям** цієї прямої і навпаки.
Перевірка виконується по двом площинам проекцій.
2. Прямі у просторі можуть займати **загальне положення**, коли вони нахилені до площин проекцій під кутами, не рівними 0° , 90° ; чи займати **окреме положення**: прямі **рівня**, які паралельні до однієї площини проекцій, та **проекціючі** прямі, які перпендикулярні до однієї площини проекцій.
3. Визначення натуральної величини відрізка прямої та кутів її нахилу до площин проекцій здійснюється перетворенням її на пряму рівня методом заміни площин проекцій.
4. Дві прямі у просторі можуть **перетинатися**, бути **паралельними** або **мимобіжними**.

Питання та завдання для самоперевірки

1. Як розташована у просторі та на комплексному кресленнику пряма загального положення?
2. Як задаються профільні прямі?
3. Як визначити натуральну величину відрізка прямої?
4. Які дії треба виконати для визначення кута нахилу прямої загального положення до горизонтальної площини проєкцій?
5. Скільки перетворень площин проєкцій необхідно виконати для визначення натуральної величини відрізка прямої та кутів її нахилу до будь-якої площини проєкцій?
6. Що таке мимобіжні прямі?

Лекція 3. Моделювання площини

Лекція присвячена проєкціюванню площини та плоских геометричних об'єктів. Розглянуті різноманітні способи завдання площини на епюрі.

Виконана класифікація площин за їх розташуванням у просторі відносно площин проєкцій. Виділені площини окремого положення: проєкціюючі і рівня, які можна завдати слідом-проєкцією. Розглянуті алгоритми роботи з площинами загального положення. Визначені ознаки належності прямої і точки площині. Розглянуті алгоритми побудови прямих та точок, що належать площинам загального положення.

Розглянуті алгоритми перетворення площини загального положення в проєкціюючу площину і в площину рівня. Наведені приклади розв'язку задач на визначення натуральної величини плоскої фігури та кутів нахилу площини до площин проєкцій.

Розглянуто алгоритм побудови проєкцій кола, що належить площинам окремого та загального положення. Наведено спосіб побудови еліпса за його осями.

ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА

Лекція 3.

МОДЕЛЮВАННЯ ПЛОЩИНИ

Основні питання

1. Задання площини на комплексному кресленнику.
2. Точки та прямі в площині. Умови належності .
3. Класифікація площин за положенням у просторі.
4. Перетворення площини методом заміни площин проекцій.
5. Проекціювання кола.
6. Взаємне положення двох площин.

Задання площини на комплексному кресленнику.

Площина в просторі нескінченна. Проекція площини в загальному випадку— все поле площини проєкції.

Положення площини у просторі задають три точки, які не належать одній прямій.

Таким чином, **визначник площини**— три точки $\Sigma(A, B, C)$.

Площину можна задати також деякими іншими способами.

- Площина Γ задана проєкціями плоскої фігури (ΔKLM).
- Площина Δ — двома паралельними прямими m і n .
- Площина θ — двома прямими c і d , що перетинаються.
- Площина Λ — двома лініями рівня f і h , що перетинаються.
- Площина Ω — прямою l та точкою D , що не належить l .

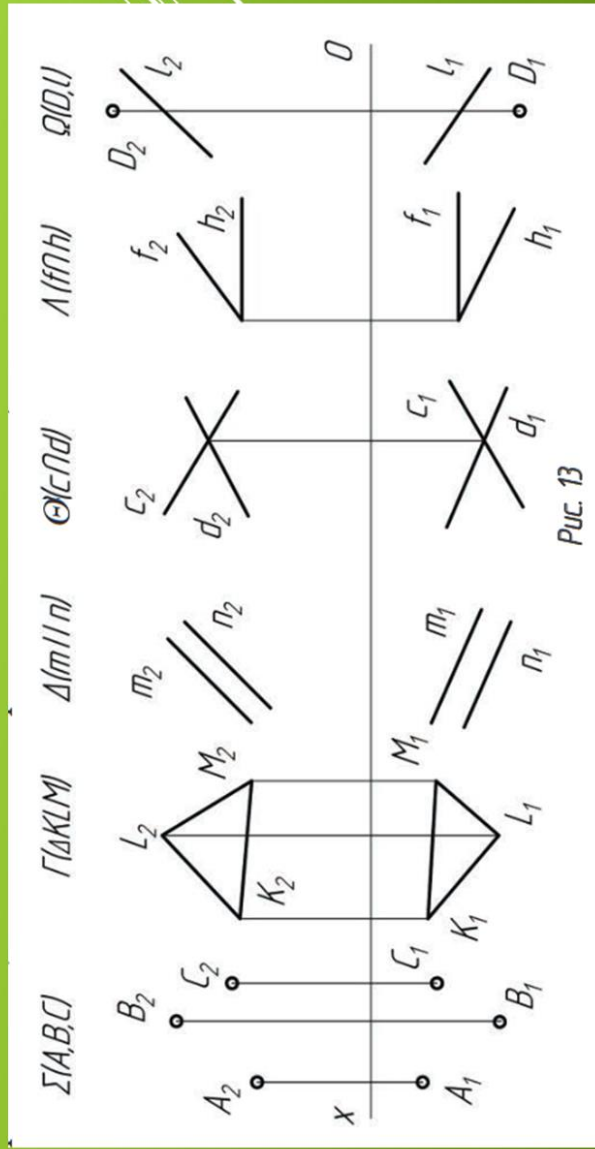
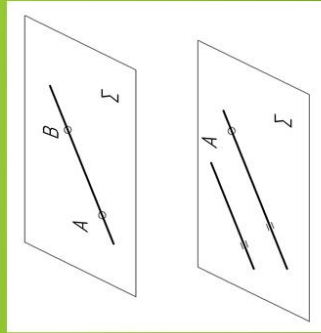


Рис. 13

Точки та прямі в площині. Умови належності .

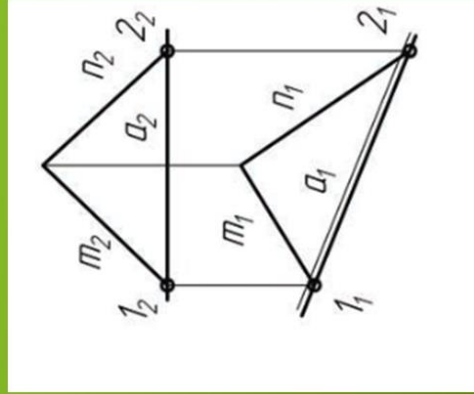


Пряма належить площині:

- якщо вона проходить через дві точки цієї площини;
- якщо вона проходить через одну точку цієї площини і паралельна прямій, яка належить цій площині.

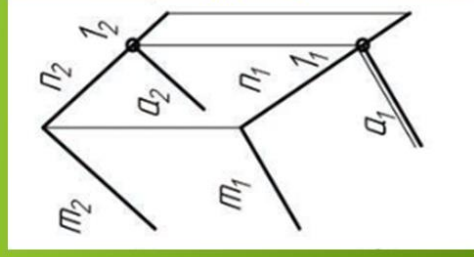
Приклад.1 В площині $\Sigma(m \cap n)$ побудувати горизонтальну проекцію прямої $\underline{a(a_2)}$.

Пряма побудована за двома точками **A** и **B**.



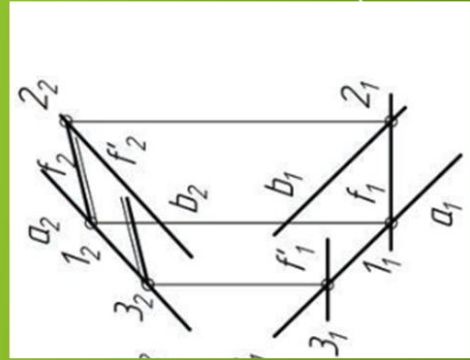
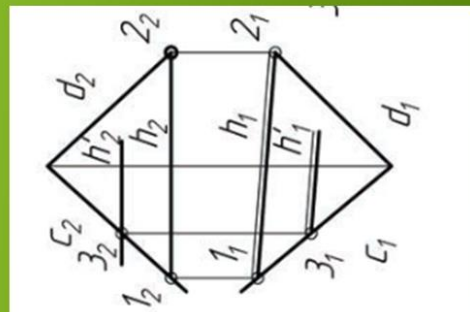
Приклад 2. В площині $\Sigma(m \cap n)$ побудувати горизонтальну проекцію прямої $\underline{a(a_2)}$.

Пряма побудована за точкою **A** та напрямом - паралельно до прямої **m**.

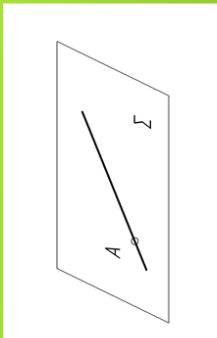


Важливе значення для розв'язку задач мають прямі рівня – **горизонталі** та **фронталі**, які належать площині.

Усі **горизонтальні прямі** мають фронтальні проекції паралельні до осі Ox . Саме з них і починають побудову цих прямих.

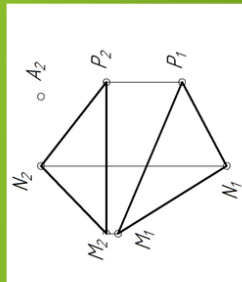


Фронтальні прямі мають горизонтальні проекції паралельні до осі Ox . Тому побудову фронтальних прямих починають з горизонтальних проекцій.

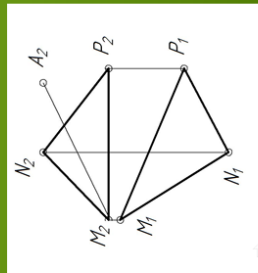


Точка належить площині, якщо вона належить **прямій**, яка належить цій площині.

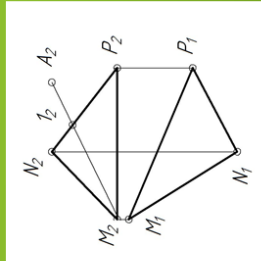
Приклад. Побудувати точку **A** в площині $\Sigma(\triangle MNP)$.



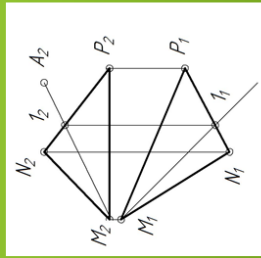
1. Через точку A проводимо довільну прямую.



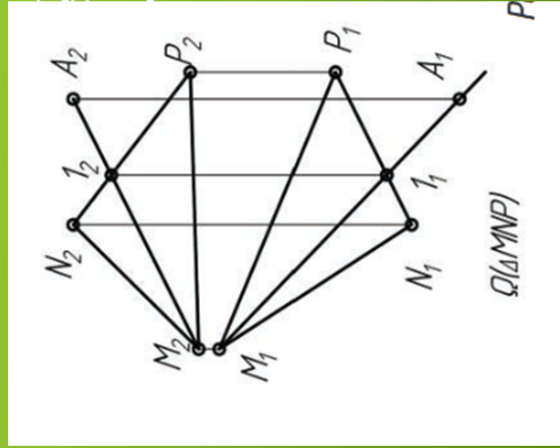
2. Будуємо її точки перетину з прямими площини



3. Визначаємо другу проекцію точки за допомогою побудованої прямої.



4. Визначаємо другу проекцію точки за допомогою побудованої прямої.

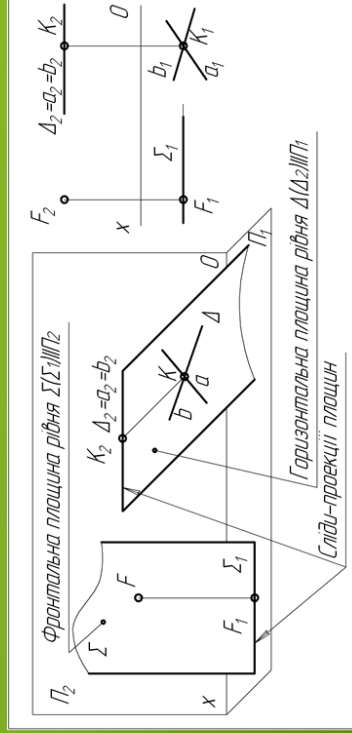


Класифікація площин за положенням у просторі

В залежності від розташування відносно площин проекцій площини розподіляються на площини **загального положення** та площини **окремого положення**.

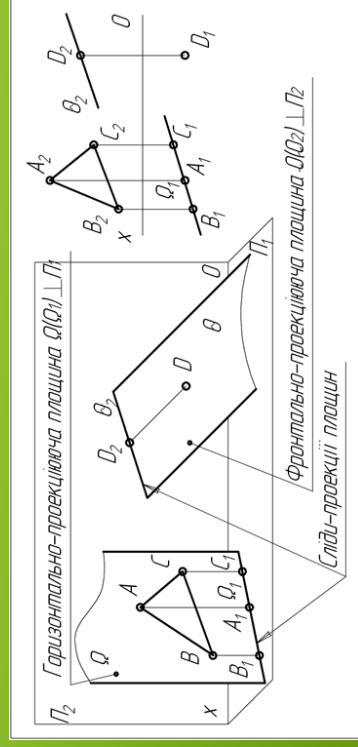
Площина, що довільно розташована по відношенню до площин проекцій, називається площиною загального положення. Площини загального положення не паралельні та не перпендикулярні жодній площині проекцій

Площини окремого положення, які паралельні до однієї з площин проекцій, називаються **площинами рівня**



- горизонтальна площина рівня, паралельна Π_1 ;
- фронтальна площина рівня, паралельна Π_2 ;
- профільна площина рівня, паралельна Π_3

Площини, які перпендикулярні до однієї з площин проекцій, називають **проекційними площинами**.

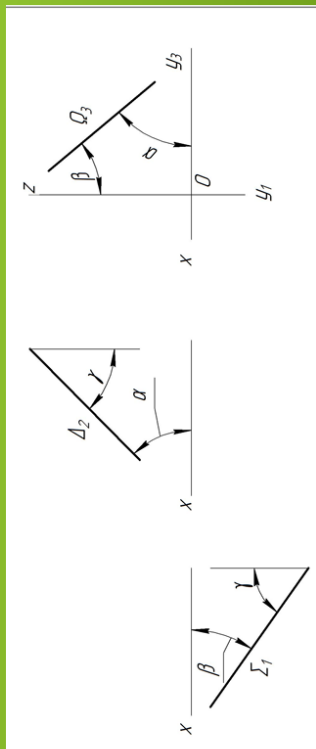
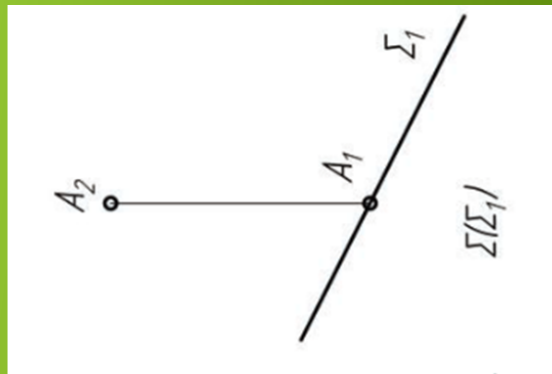


- Горизонтально-проекційна площина, $\perp \Pi_1$;
- фронтально-проекційна площина, $\perp \Pi_2$;
- профільно-проекційна площина, $\perp \Pi_3$

Площини окремого положення на епюрі можуть задаватися однією лінією — слідом-проекцією. **Слід-проекція площини** — це водночас і лінія перетину (слід) площини окремого положення з площиною проекції, і проекція цієї площини на площину проекції. Слід-проекція площини окремого положення має збиральні властивості, тобто всі геометричні об'єкти (точки, прямі, плоскі криві, плоскі фігури), що належать площині окремого положення, проєкціюються на її відповідний слід-проекцію.

Слід-проекція площини дозволяє визначити **кути нахилу площини** до площин проекції.

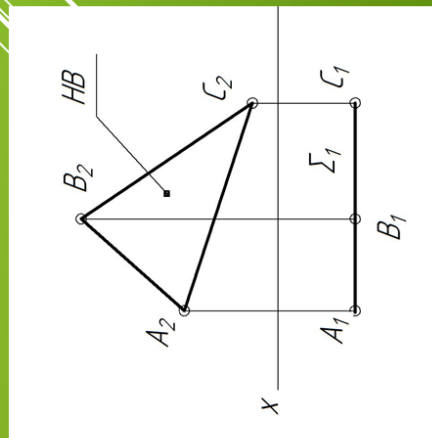
Геометричні фігури, які розташовані у площинах рівня, проєкціюються в **натуральну величину** на паралельну площину проєкції.



α – кут нахилу до Π_1

β – кут нахилу до Π_2

γ – кут нахилу до Π_3



Перетворення площини методом заміни площин проекцій

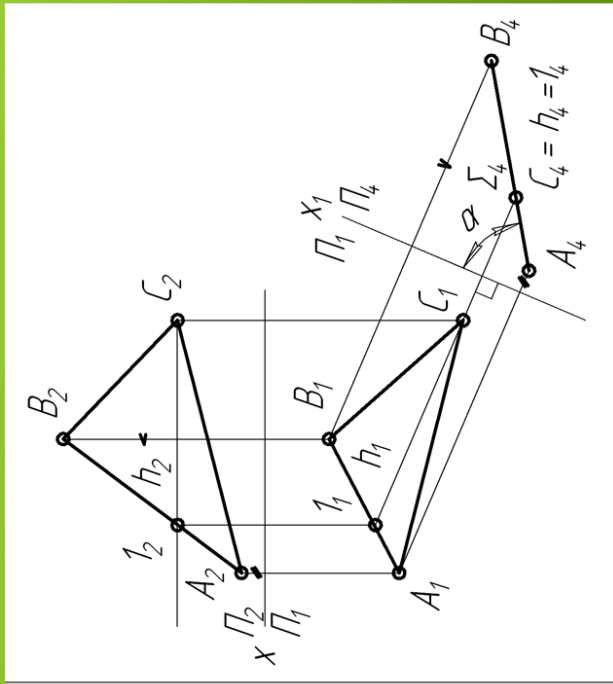
Виконуючи перетворення площини загального положення на проєкцію можна визначити кути її нахилу до площин проєкцій, а перетворення площини загального положення у площину рівня дає можливість отримати натуральну величину геометричних елементів, що належать цій площині.

1. Перетворення площини загального положення $\Sigma(\triangle ABC)$ у проєкцію.

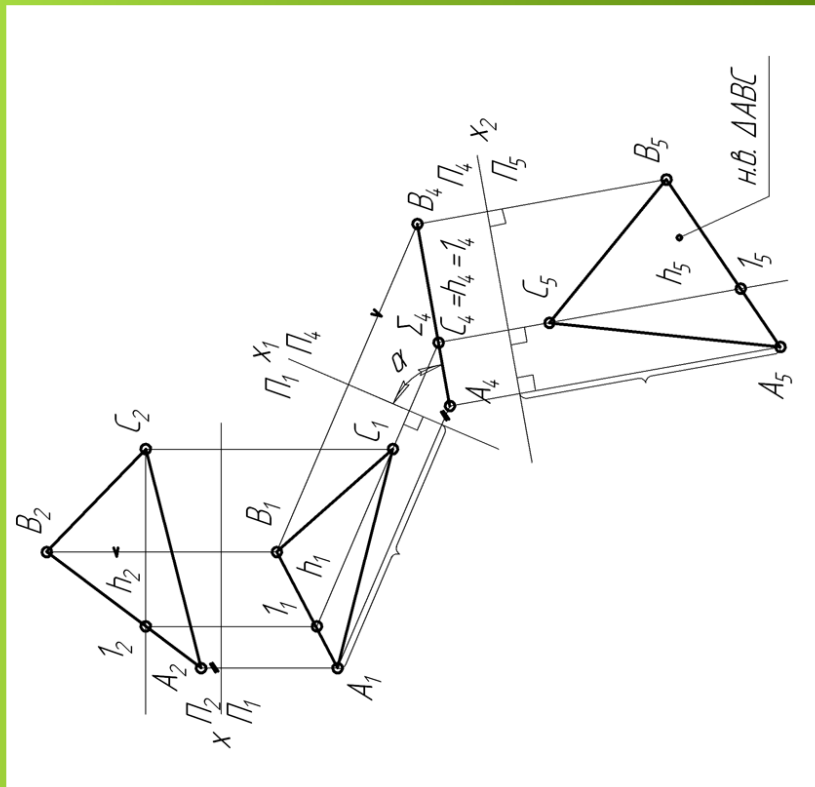
Для переходу від системи площин проєкцій Π_2/Π_1 до системи Π_1/Π_4 , в якій $\Sigma \perp \Pi_4$, достатньо, щоб довільна горизонталь h площини Σ була перпендикулярна до Π_4 . Тоді в системі площин проєкцій Π_1/Π_4 горизонталь h буде проєкціюючою прямою, а сама площина на Π_4 буде представлена слідом-проєкцією. Розташуємо $x_1 \perp h_1$. На площині Π_4 будемо проєкцію h_4 горизонталі h (проєкції точок C і 1 на площину Π_4 збігаються тому, що мають однакову координату z), потім будемо проєкцію довільної точки площини Σ , (наприклад, точки B). Слід-проєкція Σ_4 площини проведеться через h_4 та B_4 .

В даному перетворенні визначається кут α нахилу площини Σ до площини проєкцій Π_1 . Це кут між слідом-проєкцією площини Σ_4 і віссю x_1 .

Перетворення цієї ж площини у проєкцію за допомогою фронталі дозволяє визначити кут β нахилу площини Σ до Π_2 .



2. Перетворення площини загального положення в площину рівня.



Це перетворення розглянуто на прикладі площини загального положення $\Sigma(\triangle ABC)$.

Послідовно заміною двох площин проекції виконуємо такі дії:

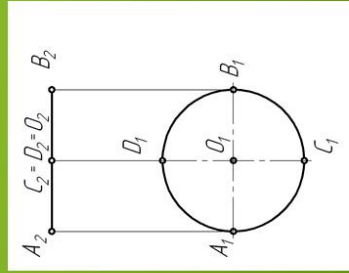
- перетворюємо площину загального положення в проєкціюючу площину (розглянуто на попередньому прикладі);
- проєкціюючу площину перетворюємо в площину рівня.

Після перетворення площини загального положення в проєкціюючу систему площин проекцій Π_1/Π_4 замінюють системою Π_4/Π_5 , в якій площина проекцій Π_5 повинна бути паралельною площині трикутника. Для цього проводять нову вісь проєкцій $x_2 \parallel A_4B_4C_4$. Будують проєкції точок A_5, B_5, C_5 на площині Π_5 . Сполучають побудовані проєкції відрізками прямих в трикутник, який і буде натуральною величиною $\triangle ABC$.

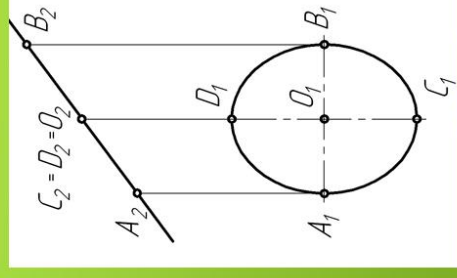
Проекціювання кола

Коло — найпоширеніша плоска крива. Воно може проєкціюватися в коло, відрізок та еліпс.

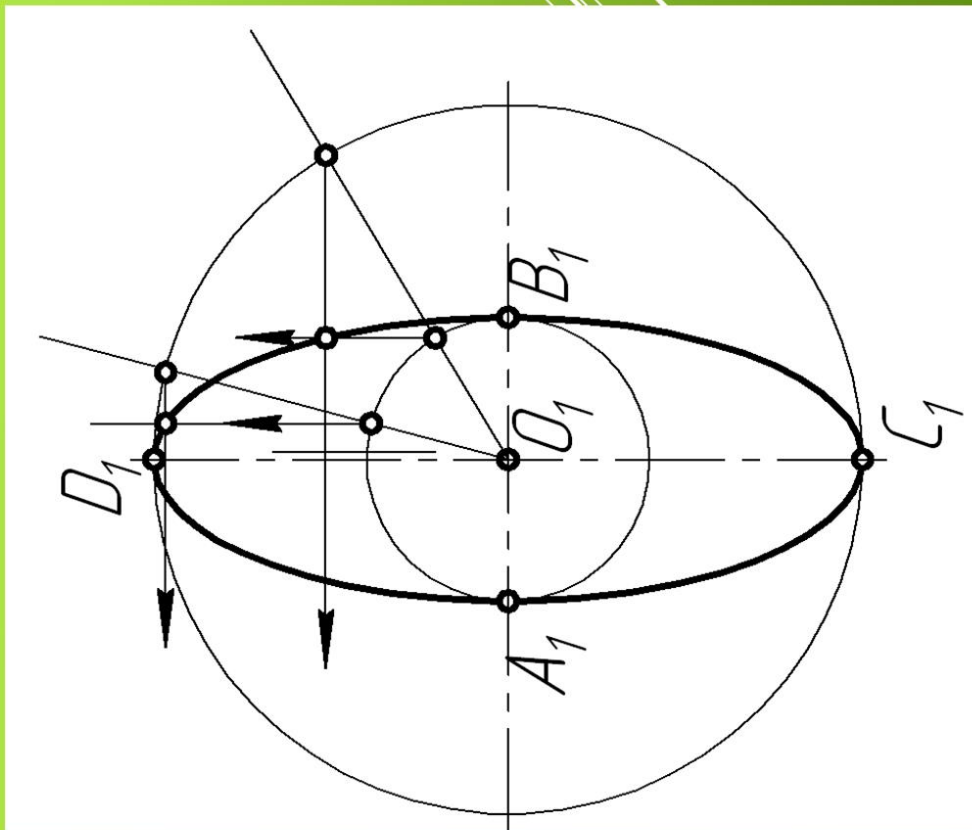
Якщо коло належить площині рівня, одна його проєкція — відрізок A_2B_2 , який дорівнює діаметру кола, інша — коло.



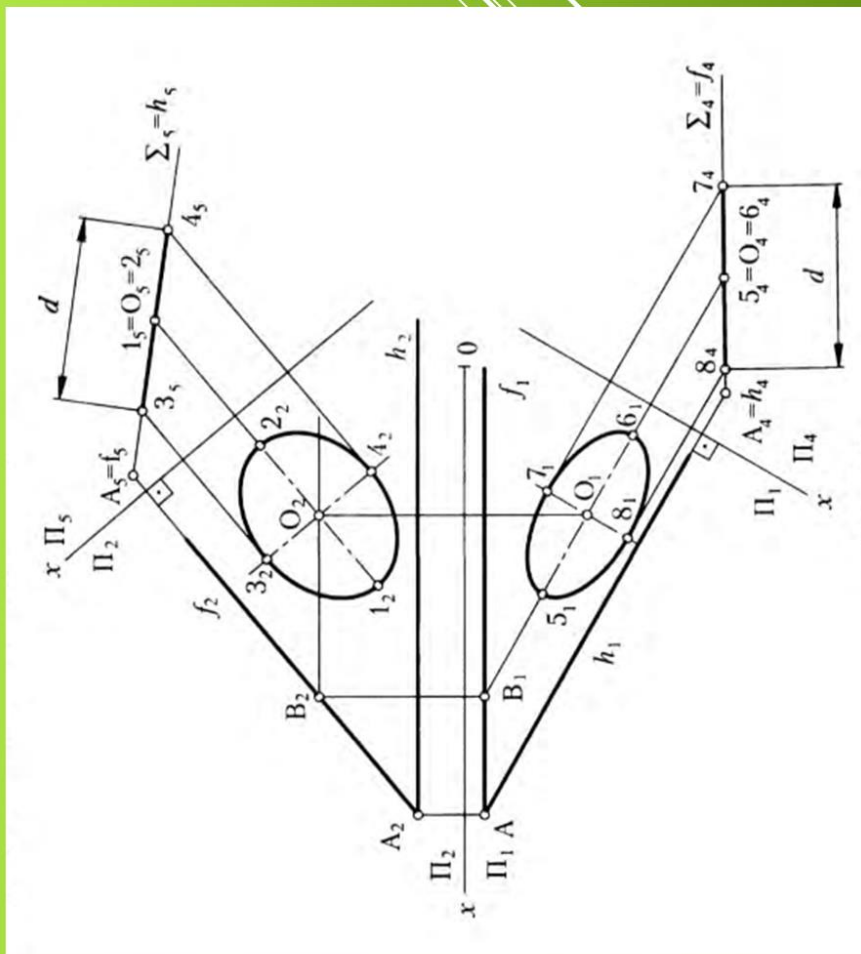
Якщо коло належить проєкціуючій площині, одна його проєкція — відрізок A_2B_2 , що дорівнює діаметру кола, інша — еліпс. Для побудови еліпса досить побудувати проєкції двох взаємно перпендикулярних діаметрів кола, які називаються спряженими. Один з діаметрів (AB) паралельний, другий (CD) — перпендикулярний тій площині проєкції, до якої перпендикулярна площина кола. Тоді на другу площину проєкції спряжені діаметри проєкціюються в осі еліпса. Велика вісь еліпса C_1D_1 дорівнює діаметру d кола, а розмір малої осі A_1B_1 визначається за проєкційним зв'язком.



Побудова проміжних точок еліпса за його осями наведена на рисунку. Для розв'язання завдань у зошиті досить побудувати 8 проміжних точок: по дві у кожній чверті еліпса.

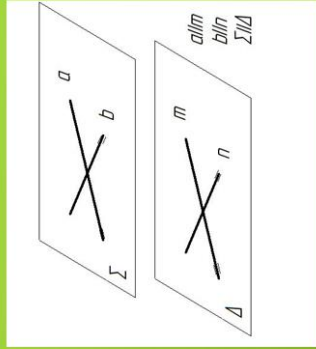
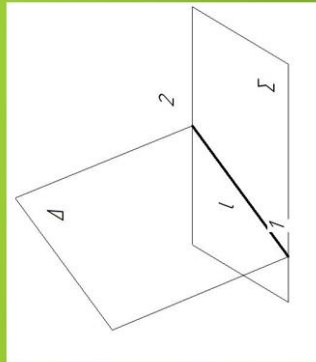


Якщо коло належить площині загального положення, обидві проекції кола — еліпси, які будуються **незалежно один від одного**. Проекційний зв'язок визначається **лише для проєкцій центра** кола. Фронтальна проєкція великої осі еліпса паралельна фронтальній проєкції фронталі площини кола, а горизонтальна проєкція великої осі еліпса паралельна горизонтальній проєкції горизонталі цієї площини, причому обидві дорівнюють діаметру кола. Малі осі визначаються за допомогою заміни площин проєкцій та перетворення площини загального положення у проєкцію, тобто задача знаходження розміру малої осі еліпса зводиться до попередньої задачі.

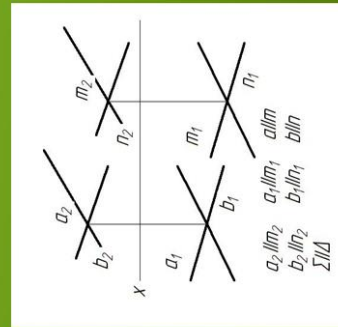


Взаємне розташування двох площин

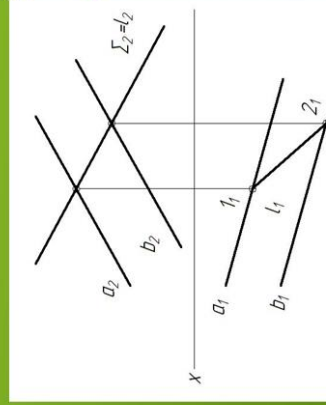
Дві площини у просторі можуть **перетинатися** або бути **паралельними**.



Площини паралельні, якщо дві прямі, що перетинаються, однією з них, відповідно, паралельні двом прямим, що перетинаються, іншої площини.



Для площин, що перетинаються, можна побудувати лінію їх перетину. Якщо одна з них займає окреме положення, то побудова лінії перетину площин спрощується. В інших випадках слід методом заміни площин проєкцій перетворити одну з заданих площин в проєкцію.



Висновки

1. Площина на комплексному кресленнику задається проекціями точок або прямих, які належать цій площині.
2. Прямі, що розташовані у площині, можна побудувати по двом точкам або по одній точці та напрямку.
3. Точка належить площині, якщо вона належить прямій, що розташована у площині.
4. Площини у просторі можуть займати **загальне положення**, коли вони нахилені до площин проекцій під кутами не рівними 0° , 90° ; чи **окреме положення**: площини **рівня**, які паралельні до однієї площини проекцій, та **проекціюючі** площини, які перпендикулярні до однієї площини проекцій.
5. Визначення **натуральної величини кутів нахилу** площини загального положення до площин проекцій здійснюється перетворенням її у **проекціюючу площину методом заміни площин проекцій**.
6. Визначення натуральної величини плоскої фігури в площині загального положення здійснюється перетворенням її у **площину рівня** методом заміни площин проекцій, що потребує **двох перетворень**.
7. Коло на площині проекцій може проекціюватись в коло, або у відрізок, або в еліпс.
8. Дві площини у просторі можуть бути паралельні або перетинатися.

Питання та завдання для самоперевірки

1. Що таке визначник площини? Наведіть приклади.
2. Як побудувати пряму в площині?
3. Наведіть умову належності точки площині.
4. Що таке слід-проекція площини окремого положення?
5. Які дії необхідно виконати для визначення натуральної величини фігури, що належить площині загального положення?
6. Як визначити кут нахилу площини загального положення до площин проекцій?

Лекція 4. Поверхні

На лекції розглядаються загальні відомості про криві лінії, їх визначення в нарисній геометрії, класифікація.

Наводиться визначення і способи завдання поверхонь. Розглядається структура визначника поверхні. Наводиться класифікація поверхонь. Розглядаються розгортні та нерозгортні лінійчасті поверхні, гвинтові поверхні, їх завдання і визначник. Надається правило належності точки до поверхні. Розглядається основна позиційна задача на поверхні. Наведені приклади розв'язку основної позиційної задачі на поверхнях.

Розглядаються обертання, їх завдання, визначення, класифікація. Наведені приклади розв'язку основної позиційної задачі на поверхнях обертання двома способами: способом твірних і способом січних площин. Надані загальні відомості по багатогранних поверхнях.

ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА

Лекція 4.

Поверхні

Основні питання

1. Кінематичний спосіб задання поверхонь.
2. Класифікація поверхонь.
3. Лінійчасті розгортні поверхні.
4. Лінійчасті нерозгортні поверхні.
5. Нелінійчасті поверхні.
6. Поверхні обертання.

Кінематичний спосіб задання поверхонь

В нарисній геометрії поверхня розглядається як множина точок, що утворена безперервним рухом лінії за певним законом.

Лінія, що утворює поверхню, називається **твірною**.

Закон руху твірної визначається **напрямними елементами** і положенням твірної відносно цих елементів у будь-який момент руху.

Визначником поверхні є сукупність геометричних елементів та інших умов, що визначають поверхню.

Визначник складається з двох частин: геометричної і алгоритмічної (або кінематичного закону).

Геометрична частина визначника — сукупність геометричних елементів (твірна, напрямні елементи), якими задається поверхня.

Алгоритмічна частина — це закон, який дозволяє в будь-який момент руху твірної з'ясувати її положення та форму.

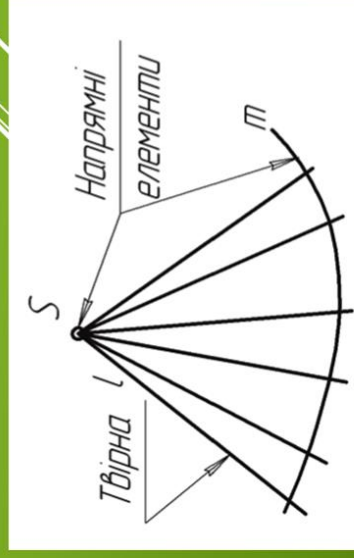
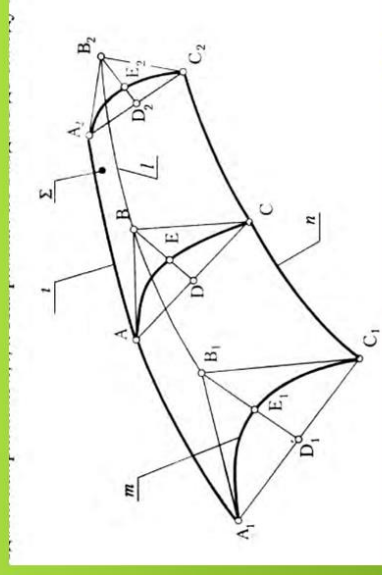
Наприклад, кінчна поверхня утворена рухом прямої лінії,

яка в кожному моменті руху перетинає напрямну лінію **m** та проходить через точку **S** .

Визначник поверхні:

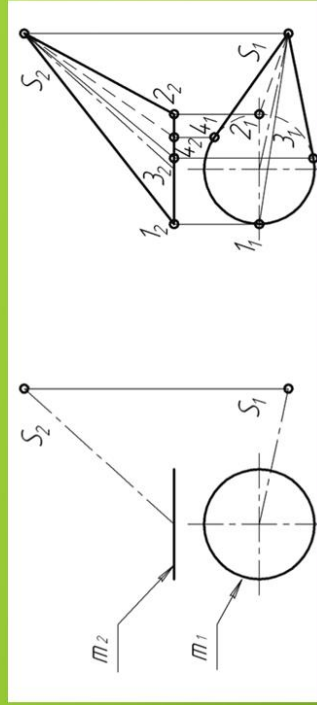
$\Phi(m, S)$ — геометрична частина,

$(\Pi m, S \in l)$ — алгоритмічна частина



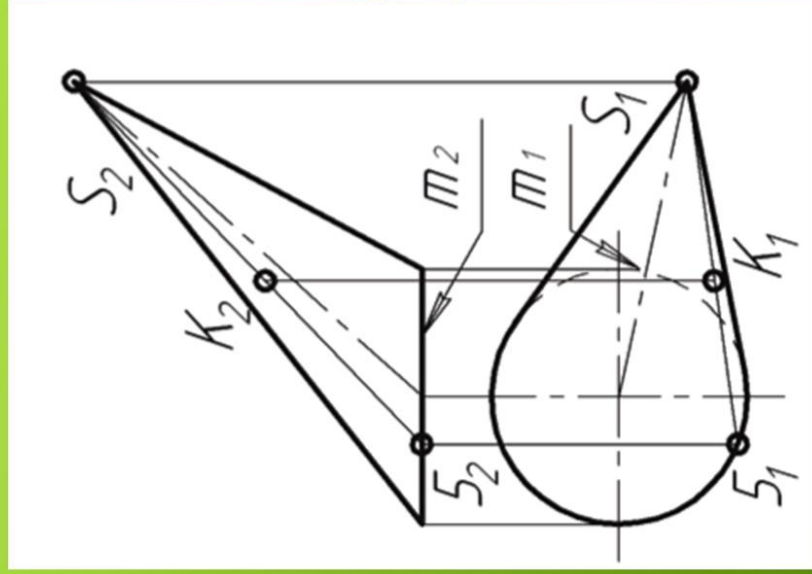
Зображення поверхні рекомендується виконувати в такій послідовності:

- визначити напрямні елементи;
- побудувати обрисні твірні поверхні.

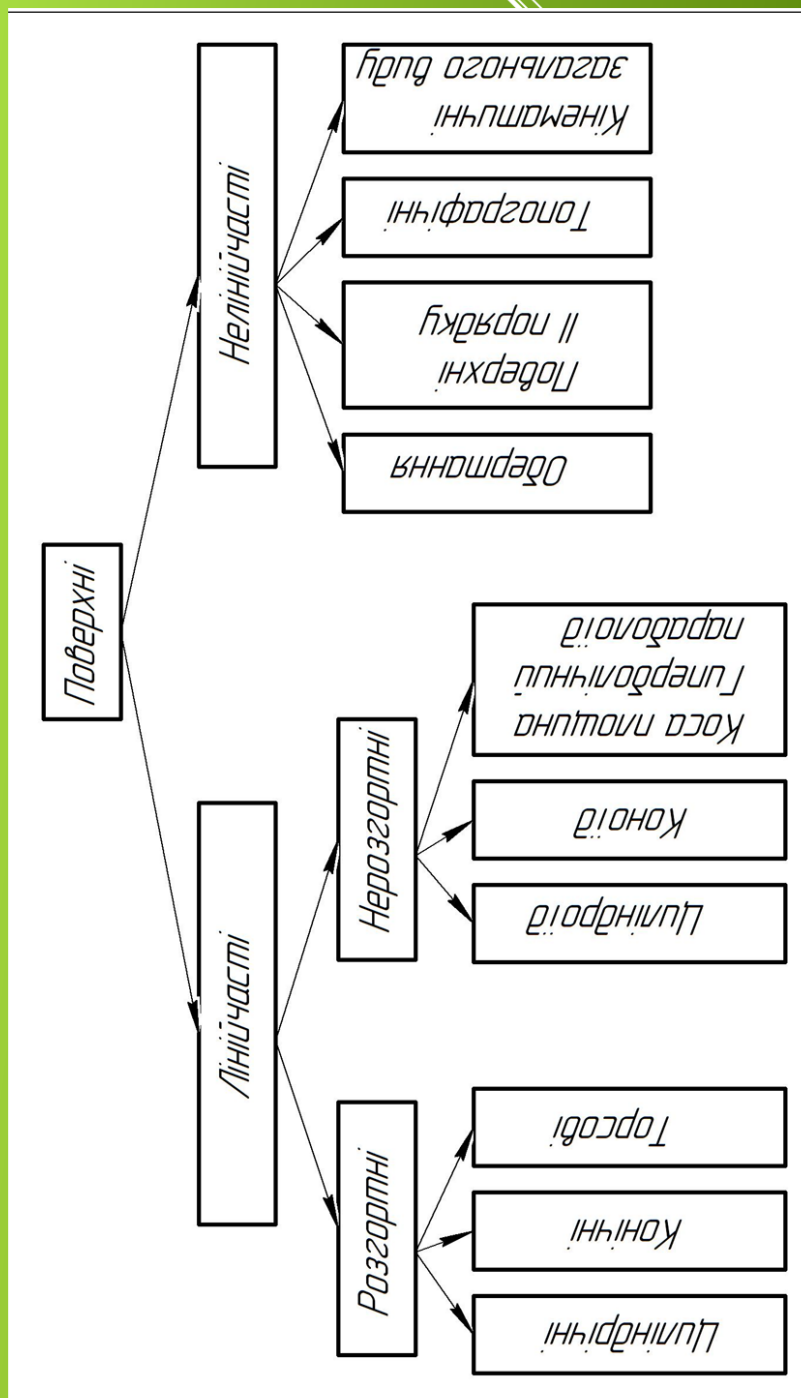


Точка належить поверхні, якщо вона належить лінії, яка знаходиться на поверхні.

Для побудови точок на поверхні рекомендується застосовувати найпростіші лінії цієї поверхні.



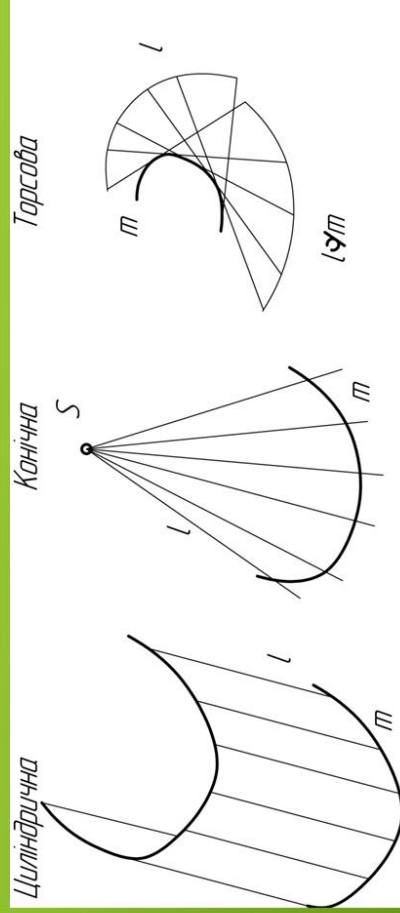
Класифікація поверхонь



Лінійчасті розгортні поверхні

Найбільш поширеними поверхнями є лінійчасті поверхні, які можуть бути **утворені рухом прямої лінії**.

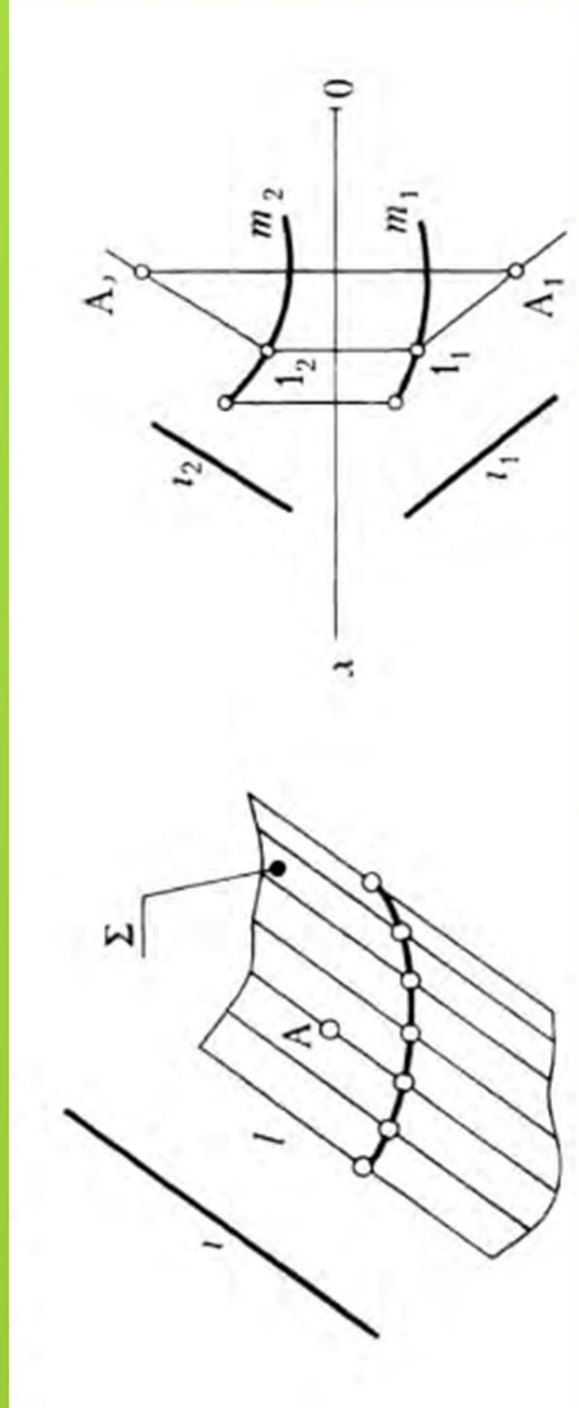
Лінійчасті поверхні, у яких твірні паралельні або перетинаються, є **розгортними**.



Існують три види лінійчастих розгортних поверхонь:

- Циліндрична поверхня загального виду;
- Конічна поверхня загального виду;
- Торсова або торсична поверхня.

1. Циліндрична поверхня загального виду утворюється рухом прямолінійної твірної l , яка в усіх положеннях паралельна до заданого напрямку \vec{l} та перетинає криволінійну напрямну m .



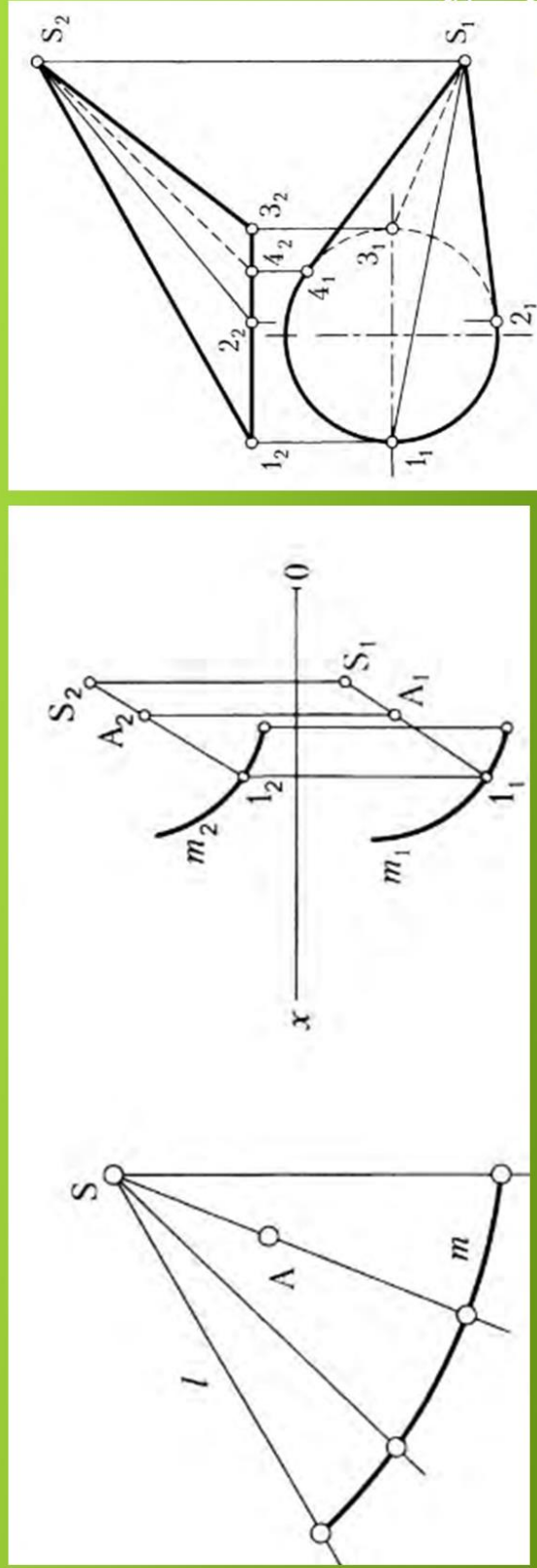
Визначник поверхні:

$$\Sigma(m, l), [l \parallel \vec{l}, l \cap m]$$

Для побудови точок на циліндричних поверхнях застосовують **твірні**.

Якщо напрямна лінія - ламана, то поверхня буде призматичною.

2. **Конічна поверхня загального виду** утворюється рухом прямолінійної твірної l , яка в усіх положеннях проходить через нерухому точку S (вершину конуса) та перетинає криволінійну напрямну m .



Визначник поверхні

$$\Delta(m, S), [l \cap m, l \supset S]$$

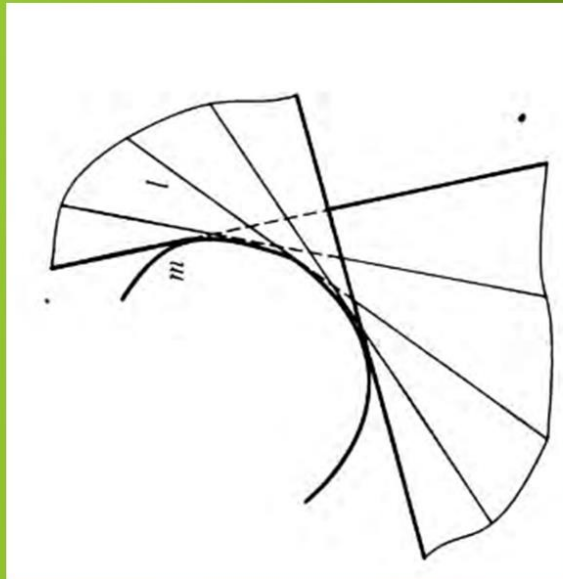
Для побудови точок на конічних поверхнях застосовують **твірні**.

Якщо напрямна лінія - ламана, то поверхня буде пірамідальною.

3. **Торсична поверхня** утворюється рухом прямолінійної твірної l , яка в усіх положеннях дотикається просторової кривої, що називається ребром звороту m .

Визначник торсої поверхні:

$$\Theta(m), [l \wedge m].$$

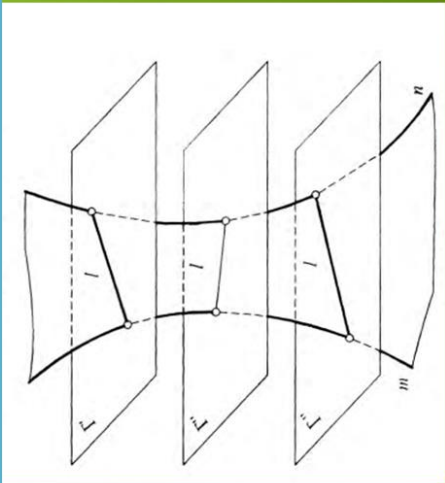


Лінійчасті нерозгортні поверхні

Серед багатьох лінійчастих нерозгортних поверхонь розглянемо групу поверхонь з площиною паралелізму.

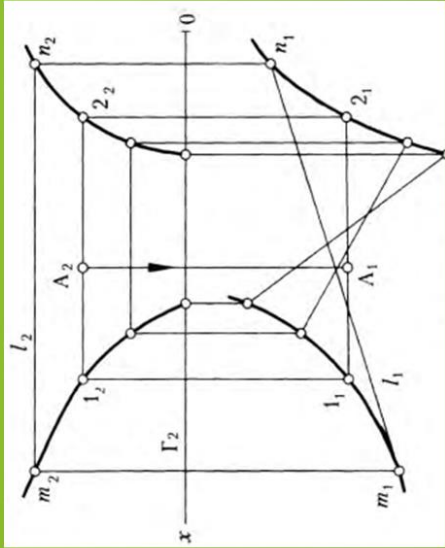
Поверхні з площиною паралелізму утворюються рухом прямої лінії l , яка у всіх положеннях паралельна деякій площині Γ та перетинає дві напрямні криві m та n .

Твірні цих площин паралельні одній площині, але мимобіжні по відношенню одна до одної.



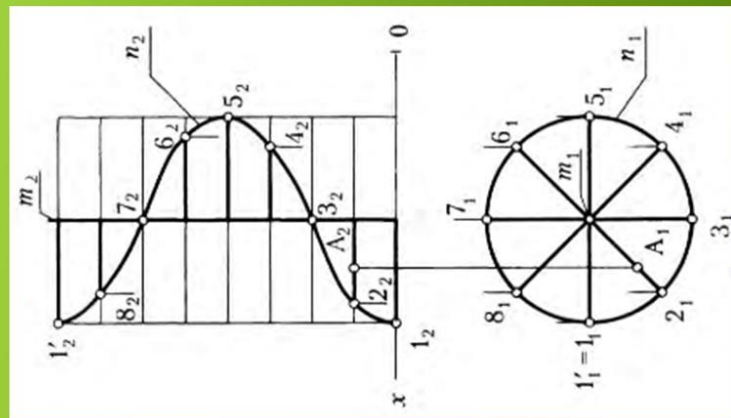
Визначник поверхонь з площиною паралелізма:

$$\Sigma(m, n, \Gamma); [l \cap m, l \cap n, l \parallel \Gamma].$$



Обидві напрямні m та n - криві лінії,
 Π_1 - площина паралелізму
 Точка A побудована за допомогою твірної 1-2.

2. **Конюїд**, у якого одна напрямна пряма m , а інша – крива n .

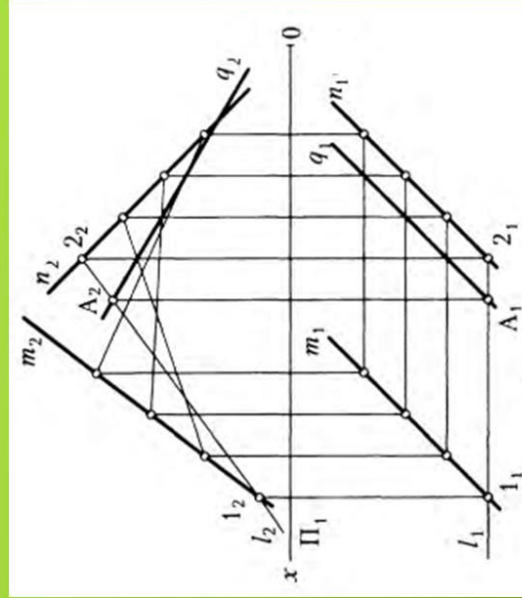


На рис. наведений комплексний кресленик прямого гелікоїда – одного з розповсюджених видів конюїда.

Напрямна крива n – гвинтова лінія, напрямна пряма m – горизонтально-проектуюча. Площина паралелізму – Π_1

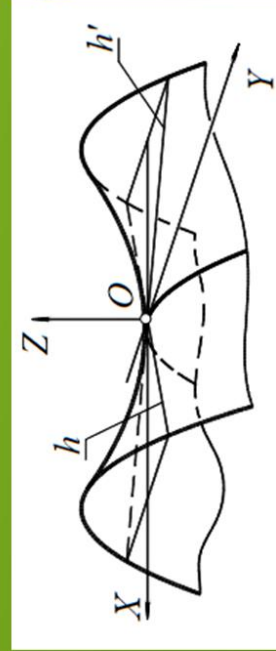
Точка **A** побудована за допомогою твірної, що проведена з точки 2.

3. **Коса площина** або **гіперболічний параболоїд**, у якого обидві напрямні m та n – мимобіжні прямі лінії.



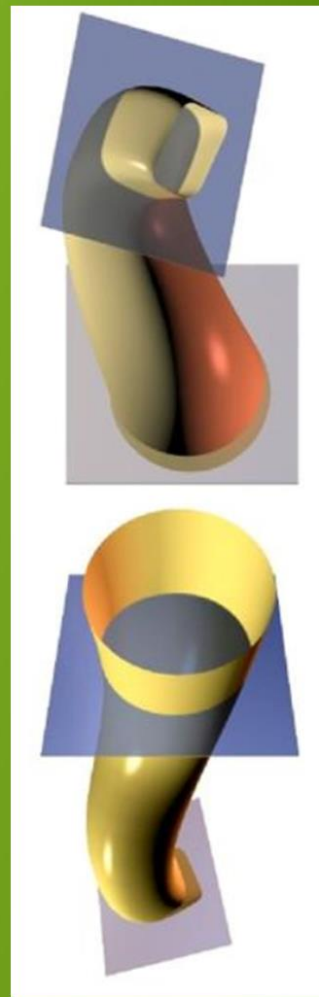
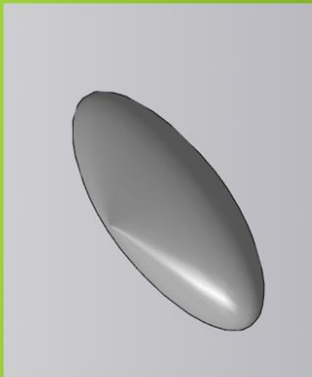
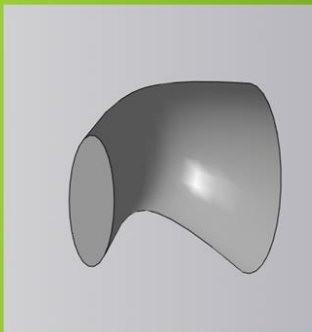
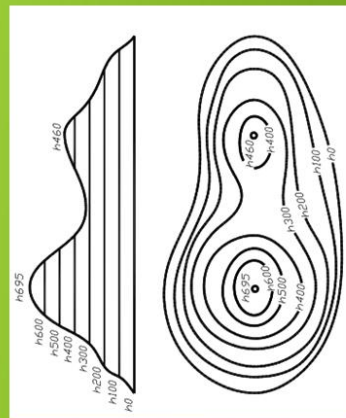
Π_2 – площина паралелізму.

Точка **A** побудована за допомогою твірної l , що проведена з точки 1 паралельно до площини паралелізму Π_2 .



Нелінійчасті поверхні

Нелінійчасті поверхні дуже різноманітні.



Поверхні обертання

Поверхні обертання утворюються обертанням деякої твірної навколо нерухомої прямої – осі поверхні обертання.

Визначник поверхні:

$$\Sigma(l, i); [l \cup i],$$

i – вісь обертання, l – твірна

На поверхнях обертання виділяють дві групи кривих:

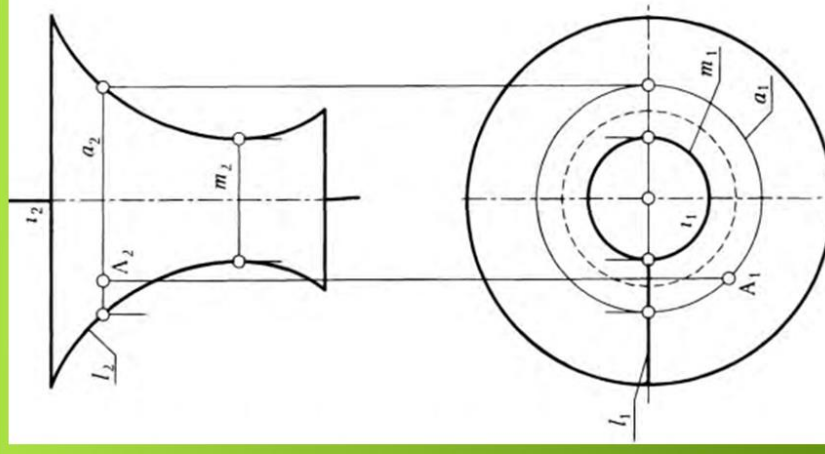
- паралелі, що утворюють точки кривих у площинах, перпендикулярних до осі обертання;
- меридіани – лінії, що утворені перетином поверхні обертання площинами, які проходять через її вісь.

Кола **a** та **m** – паралелі, крива **l** – меридіан.

В залежності від типу твірної та її положення відносно осі обертання можна отримати такі поверхні:

- пряма лінія, що паралельна осі обертання — циліндр обертання;
- пряма лінія, що перетинає вісь обертання — конус обертання;
- пряма лінія, що мимобіжна до осі обертання — гіперболоїд обертання;
- коло, центр якого належить осі обертання — сферична поверхня;
- коло, центр якого не належить осі обертання — торова поверхня.

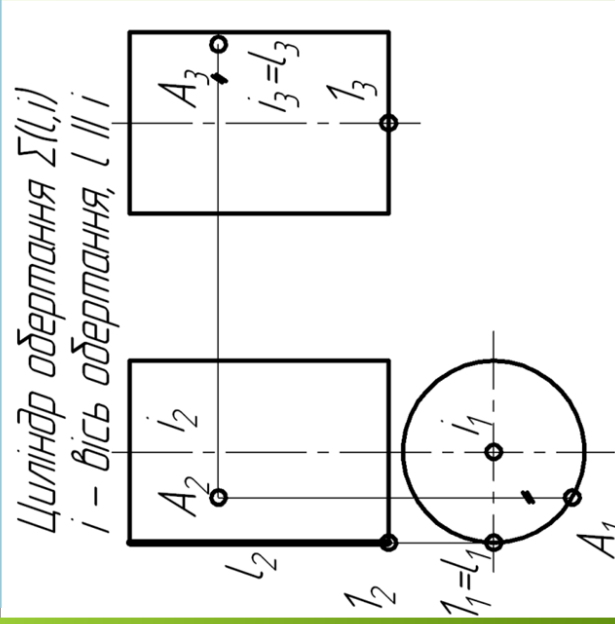
Точки на поверхнях обертання будуються за допомогою паралелей.



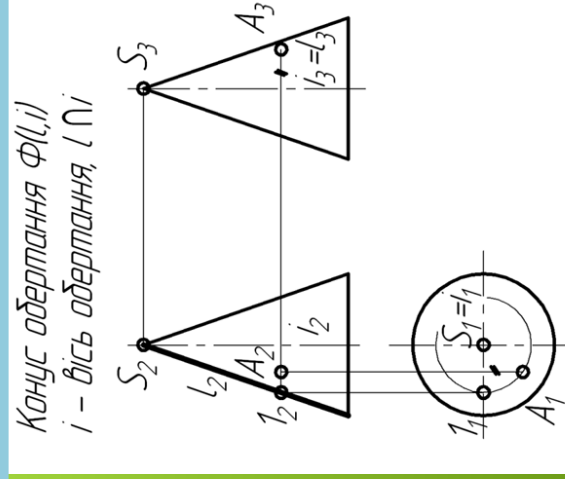
Точка **A** побудована за допомогою паралелі **a** .

Розглянемо побудову точок на найпоширеніших поверхнях обертання.

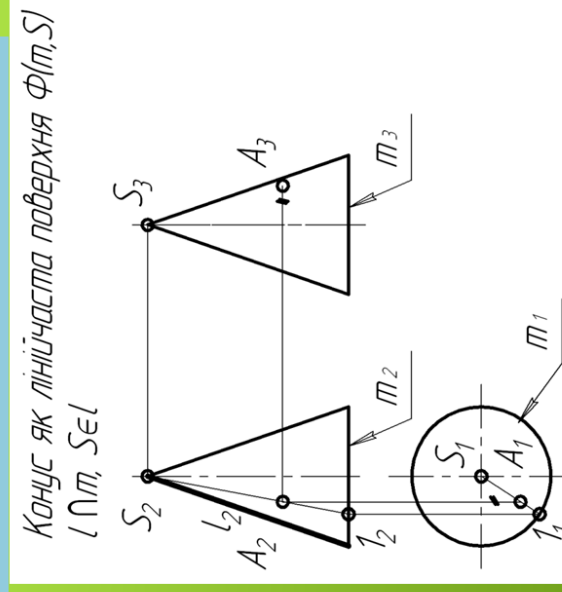
Для однозначного розв'язку задач на побудову точок вважають, що точка видима на тій площині проєкції, де вона задана.



Оскільки циліндр є проєкціюючою поверхнею, вся його поверхня та паралелі проєкціюються в одне коло на Π_1 . Тому побудова точок на циліндрі спрощується.

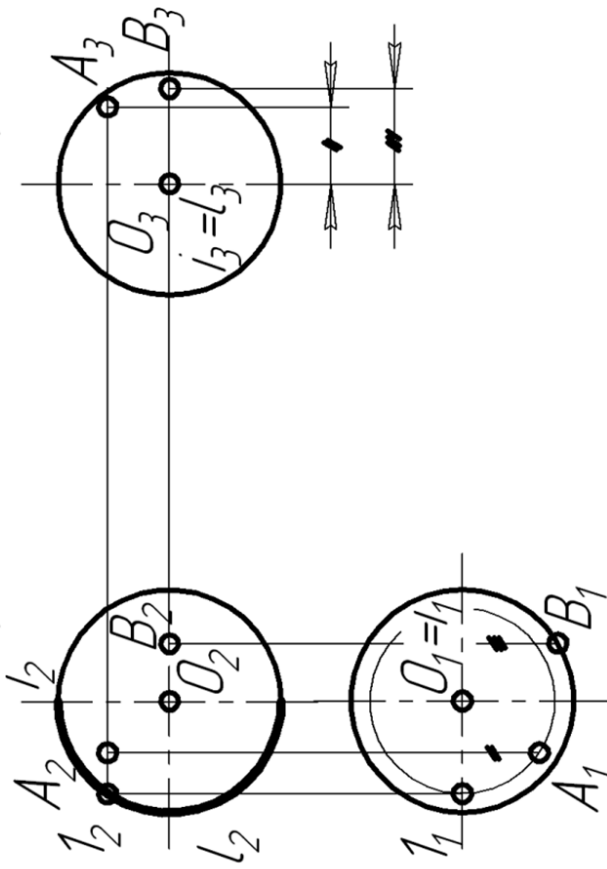


Побудова точок на конусі за допомогою паралелей.



Побудова точок на конусі за допомогою твірних.

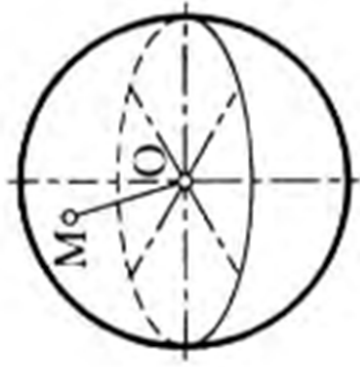
Сфера $\Delta(l, i, l - \text{півкола}, O \in i,$
 $O - \text{центр півкола}, i - \text{вісь обертання},$



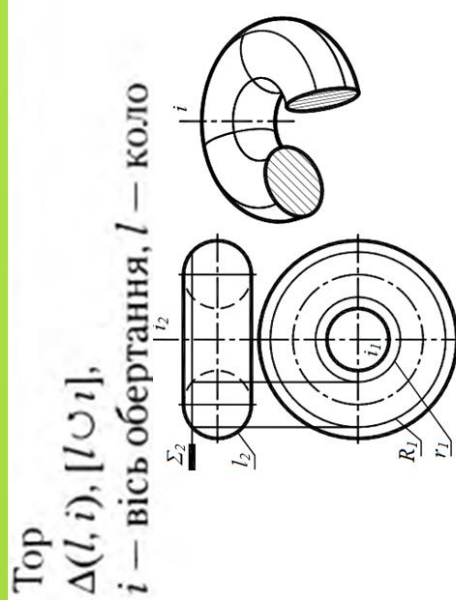
Точки побудовані за допомогою паралелей.

Сфера

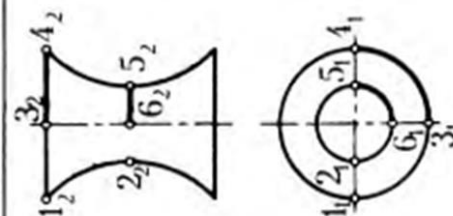
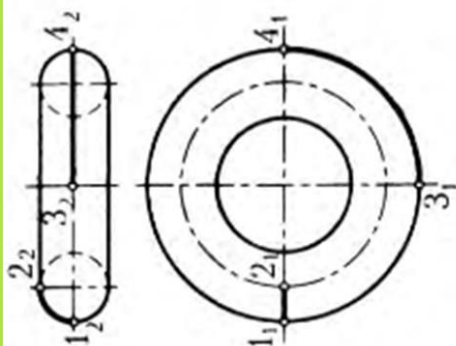
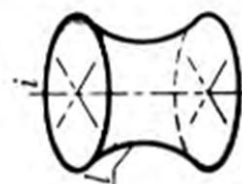
$\Theta(M, O, R); OM = R$



Сферу можна визначити як поверхню, всі точки якої віддалені від її центра на задану відстань **R**.



Гіперboloїд одноповерхнинний
 $\Sigma(l, i); [l \cup i]$,
 i — вісь обертання, l — гіпербола



Висновки

1. Поверхня розглядається як множина точок, що утворена безперервним рухом деякої лінії за певним законом.
2. Поверхні задаються визначником, який містить геометричну та алгоритмічну частини.
3. Точка належить поверхні, якщо вона належить лінії, що розташована на поверхні.
4. Лінійчасті поверхні можуть бути **утворені рухом прямої лінії**.
5. Лінійчасті поверхні, у яких твірні паралельні або перетинаються, є розгортними. Це циліндричні, конічні та торсові поверхні.
6. Твірні нерозгортних лінійчастих поверхонь мимобіжні.
7. Точки на лінійчастих поверхнях будуються за допомогою твірних.
8. Поверхні обертання утворюються обертанням деякої твірної навколо нерухомої осі.
9. Точки на поверхнях обертання будуються за допомогою паралелей.

Питання та завдання для самоперевірки

1. Наведіть приклади плоских та просторових кривих.
2. Що таке визначник поверхні?
3. Яку структуру має визначник поверхні?
4. Які умови належності точки поверхні?
5. Що таке поверхня обертання? Наведіть приклад визначника цієї поверхні.
6. Наведіть приклади лінійчастих розгортних поверхонь.

Лекція 5. Аксонометрія.

У лекції розглядаються принципи побудови аксонометричних зображень. Наведена теорема Польке-Шварца. Розглянуті властивості аксонометричного проєкціювання. Надані основні типи аксонометричних проєкцій. Розглядається ГОСТ 2.317-68 «Аксонометричні проєкції».

Прямокутна ізометрія: задання осей, коефіцієнти спотворення, приклади побудови точки, прямої, площини, кола, багатогранної поверхні, штрихування перерізів.

Прямокутна диметрія: задання осей, коефіцієнти спотворення, приклади побудови точки та кола.

Косокутні аксонометричні проєкції: задання осей, коефіцієнти спотворення.

Розглядається послідовність виконання аксонометричної проєкції деталі за її ортогональними проєкціями на прикладі побудови прямокутної ізометрії та виконання перерізів, що відповідають розрізам на кресленику деталі.

ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА

Лекція 5. Аксонометрія

Основні питання

1. Утворення аксонометричних проекцій.
2. Коефіцієнти спотворення.
3. Класифікація аксонометричних проекцій.
4. Стандартні види аксонометрії.
5. Прямокутна ізометрія.
6. Прямокутна диметрія.
7. Косокутна фронтальна ізометрія.
8. Алгоритм побудови аксонометрії деталі.
9. Висновки.

Утворення аксонометричних проєкцій

Зміст методу аксонометричного проєкціювання полягає в тому, що предмет відносять до деякої системи координат, а потім його разом з системою координат проєкціюють паралельними променями на будь-яку картинну площину Π' .

Одержані таким чином проєкції називаються **аксонометричними** і мають властивості наочності та оберненості.

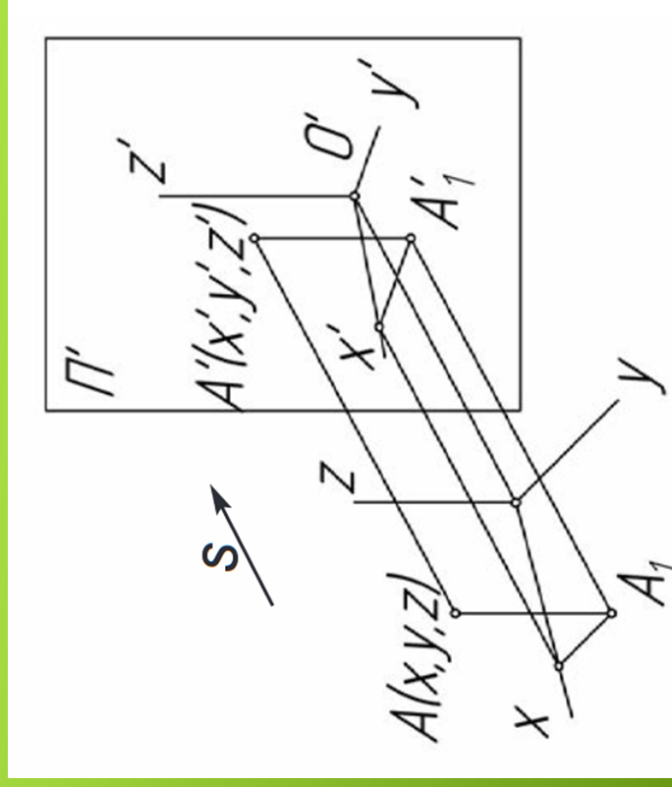
Напрямок проєкціювання вибирають так, щоб він не збігався з жодною з координатних осей. При цьому зображення виходить наочним.

На аксонометричних проєкціях можна вимірювати прямолінійні елементи предмета, що паралельні координатним осям.

Побудова аксонометричного зображення предмета виконується за характерними точками з урахуванням властивостей паралельного проєкціювання.

В аксонометрії зберігаються:

- паралельність прямих,
- належність точок прямим та кривим лініям;
- пропорційність відрізків на одній прямій та паралельних прямих.



Коефіцієнти спотворення

Характерні точки аксонометрії предмета будуються за координатами.

З метою використання методу координат в аксонометрії вводяться показники спотворення по осях.

Показники спотворення дорівнюють відношенням аксонометричних координат точки до відповідних натуральних координат:

$$u = x'/x;$$

$$v = y'/y;$$

$$w = z'/z.$$

Якщо показники спотворення відомі, можна побудувати аксонометричне зображення точки за її натуральними координатами:

$$x' = ux; y' = vy; z' = wz.$$

Ці ж формули надають можливість визначити натуральні координати точок по їх аксонометричним зображенням.

Класифікація аксонометричних проєкцій

В залежності від **співвідношення між показниками спотворення** розрізняють:

- **ізометрію**, якщо показники за всіма осями однакові $u = v = w$;
- **диметрію**, якщо показники за двома осями однакові, а за третій відрізняється $u = w \neq v$;
- **триметрію**, якщо показники за всіма осями різні.

Якщо **напрямок проєціювання** перпендикулярний до площини аксонометричних проєкцій, то аксонометрія — **прямокутна**, якщо ні, то — **косокутна**.

Показники спотворення зв'язані між собою співвідношенням:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2 \text{ — в прямокутній аксонометрії;}$$

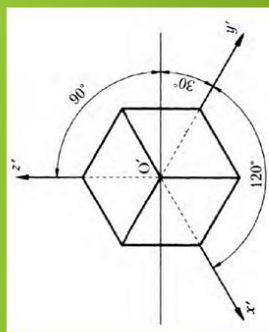
$$u^2 + v^2 + w^2 = 2 + \operatorname{ctg}^2 2\varphi \text{ — в косокутній аксонометрії,}$$

де φ — кут між напрямом проєціювання та площиною P' .

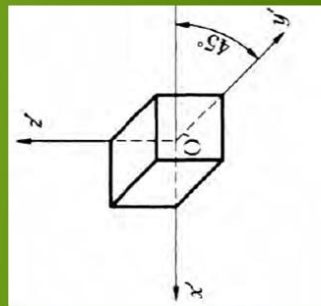
Стандартні види аксонометрії

У конструкторській практиці застосовуються п'ять стандартних видів аксонометрії ([ДСТУ ГОСТ 2.317:2014](#)).

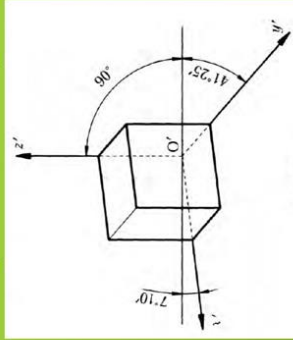
прямокутна ізометрія $u=v=w$



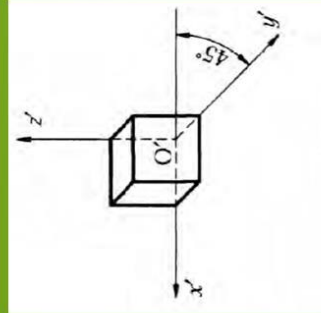
косокутна фронтальна ізометрія $u=v=w=1$



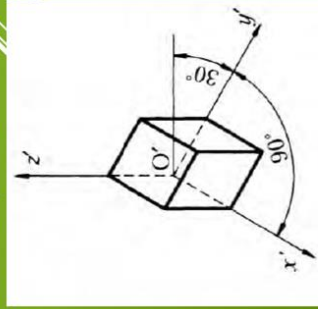
прямокутна диметрія $u=w, v=0,5u$



косокутна фронтальна диметрія $u=w=1, v=0,5$



косокутна горизонтальна ізометрія $u=v=w=1$



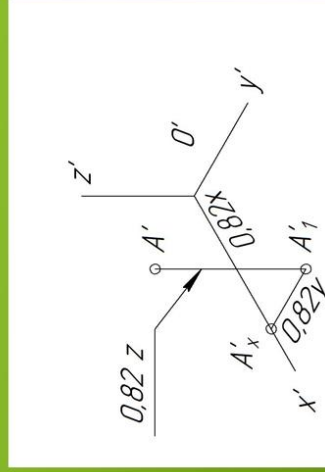
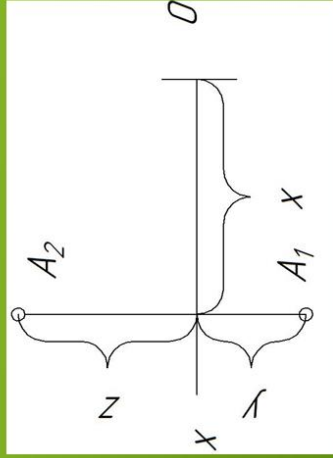
Прямокутна ізометрія

Кординатні осі в ізометрії розташовані під кутом 120° , причому вісь z направлена вертикально угору.

Коефіцієнти спотворення однакові $u = v = w$, та дорівнюють

$$u = \sqrt{2/3} = 0.82$$

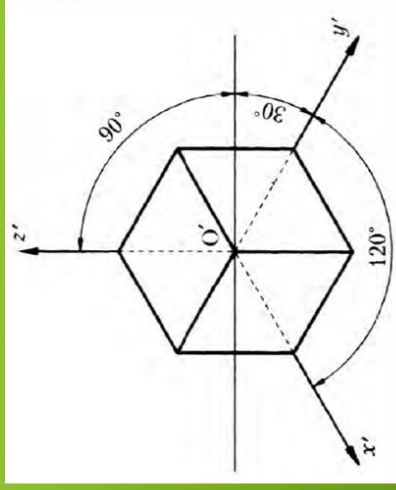
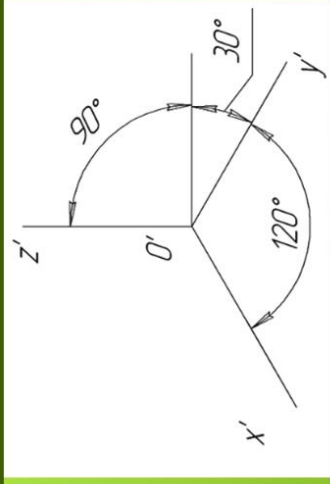
Приклад. За ортогональними проєкціями точки побудувати її в ізометрії.



Для спрощення побудови користуються коефіцієнтами спотворення

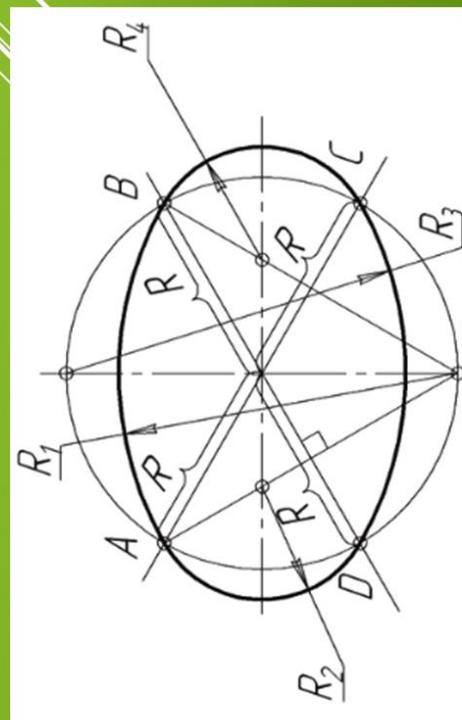
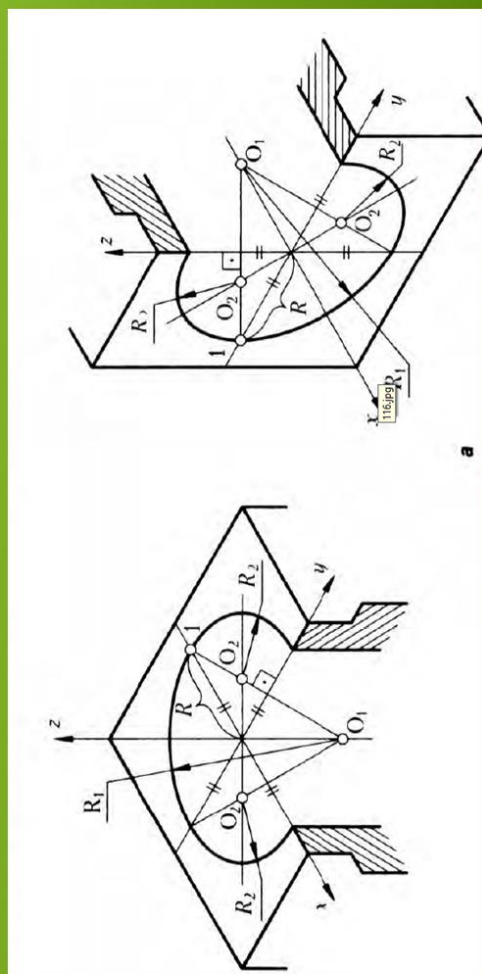
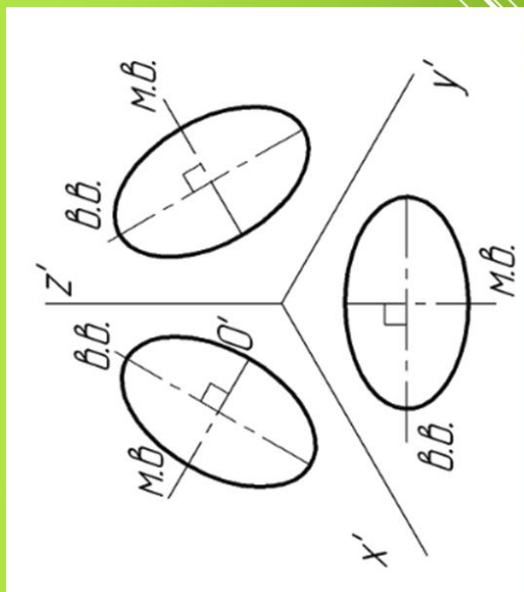
$$u=1,$$

які називаються **приведеними**. При цьому зображення збільшується в $1/0.82=1.22$ рази, і така ізометрія називається **приведеною**.

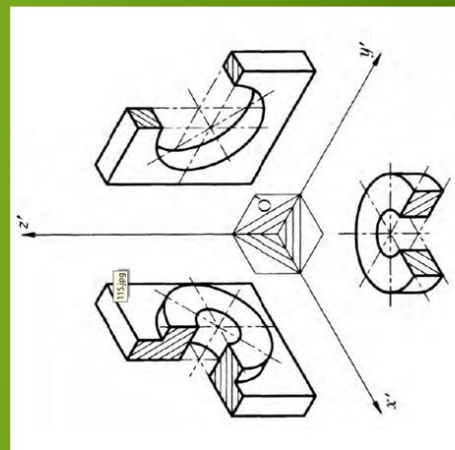
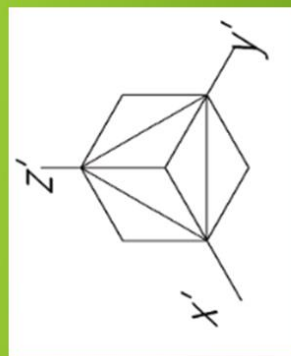


Аксонметрична проекція кола — еліпс. Якщо коло належить площині рівня, мала вісь (м.в.) еліпса паралельна тій координатній осі, що відсутня в площині кола, а велика (в.в.) — перпендикулярна до неї. В приведеній прямокутній ізометрії для всіх координатних площин мала вісь дорівнює $0,71d$, велика — $1,22d$ (d — діаметр кола).

Для спрощення побудови аксонометричного зображення стандартом дозволяється замінювати еліпси овалами. На рис. наведена побудова овала, що зображує коло радіуса R , розташоване в горизонтальній площині.

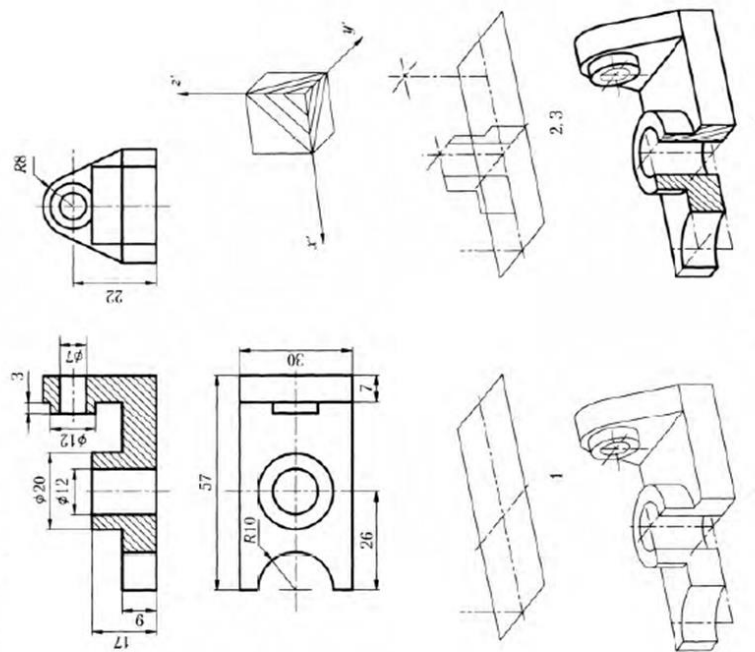


Лінії штрихування виконують паралельно ізометричній проєкції однієї з діагоналей квадратів, сторони яких розташовані на координатних осях відповідної площини перерізу.



Побудову аксонометричного креслення деталі за ортогональними проєкціями виконують у такій послідовності (рис. 5.6).

1. Побудувати основу деталі.
2. Провести аксонометричні осі для всіх елементів деталі.
3. Побудувати перерізи, що утворюються у площинах розрізів на ортогональних проєкціях деталі.
4. Виконати зображення елементів деталі.
5. Виконати штрихування.



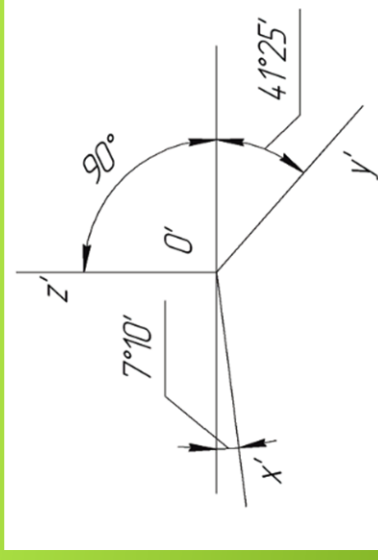
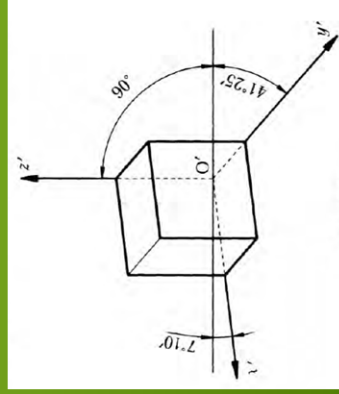
Прямокутна диметрія

В диметрії вісь **z** розташована вертикально, вісь **x** нахилена до горизонталі під кутом $7^{\circ}10'$ та йде вліво, а вісь **y** - під кутом $41^{\circ}25'$ та йде вправо.

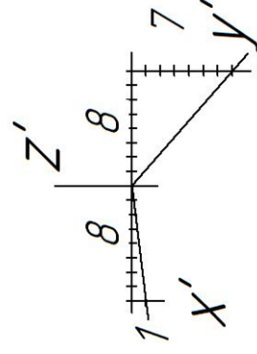
Коефіцієнти спотворення за осями **x** та **z** однакові, а уздовж осі **y** в 2 рази менше $u = 2v = w$, та дорівнюють

$$u = \sqrt{\frac{8}{9}} = 0,94, \quad v = 0,5u = 0,47$$

Для спрощення побудови користуються коефіцієнтами спотворення $u = w = 1, v = 0.5$, які називаються **приведеними**. При цьому зображення збільшується в $1/0,94 = 1,06$ рази, і така диметрія називається **приведеною**.



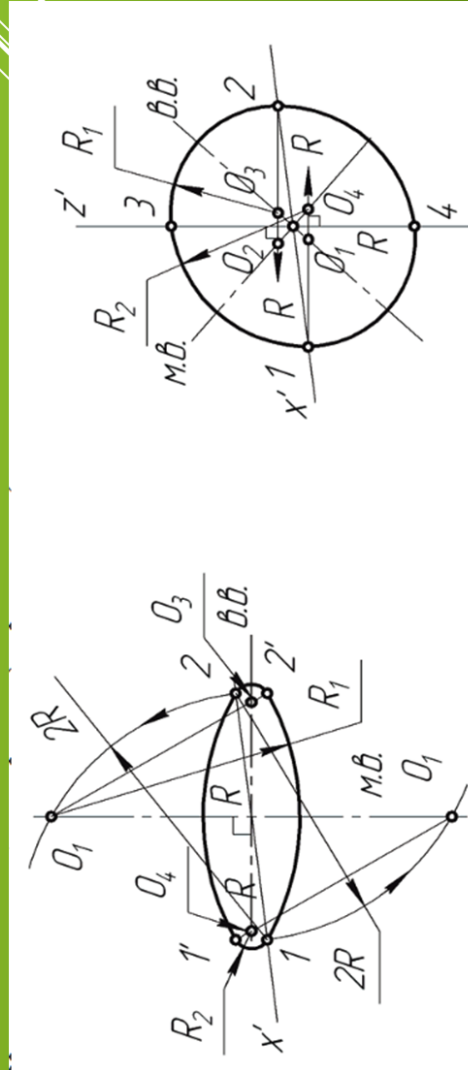
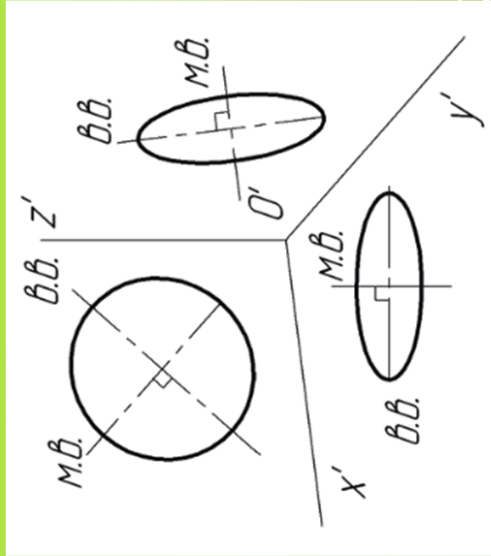
Осі координат в диметрії зручно будувати за тангенсом їх кутів нахилу.



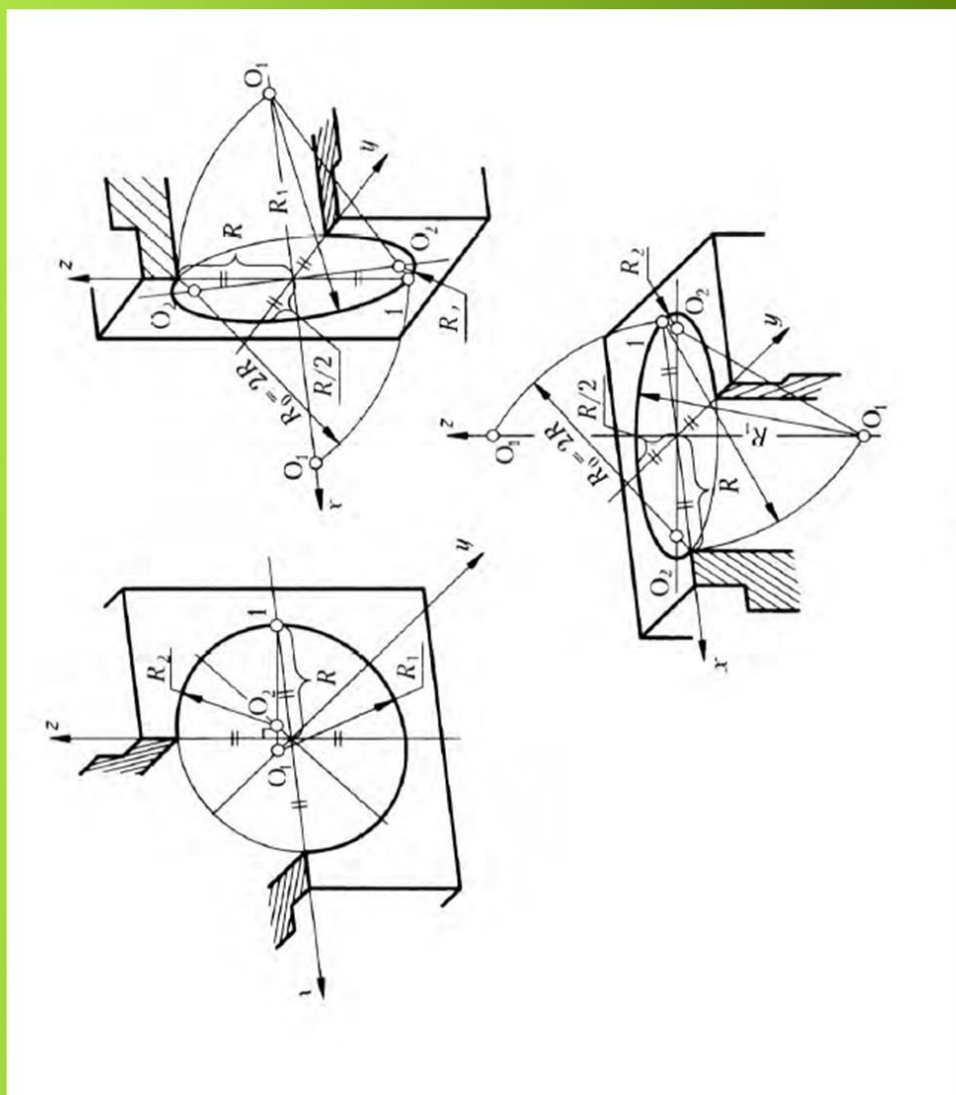
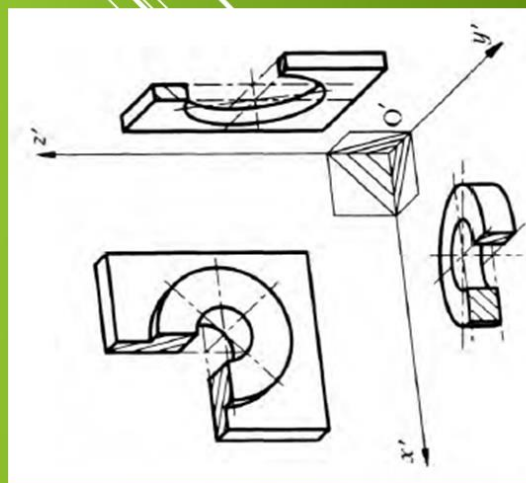
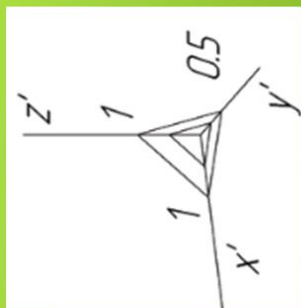
Акснометрична проекція кола — еліпс. Якщо коло належить площині рівня, мала вісь (м.в.) еліпса паралельна тій координатній осі, що відсутня в площині кола, а велика (в.в.) — перпендикулярна до неї. В приведеній прямокутній диметрії велика вісь еліпса дорівнює **1,06d** (**d** — діаметр кола), а мала вісь для двох координатних площин, що містять вісь **y**, дорівнює **0,35d** (вузький еліпс), а для площини **xOz** — **0,95d** (широкий еліпс).

Для спрощення побудови акснометричного зображення стандартом дозволяється замінювати еліпси овалами.

Побудови овалів, що зображує коло радіуса **R**, розташоване в горизонтальній площині (вузький овал), та коло, що належить фронтальній площині (широкий овал), наведені на рисунках.



Побудова напрямку штрихування
перерізів у прямокутній диметрії.

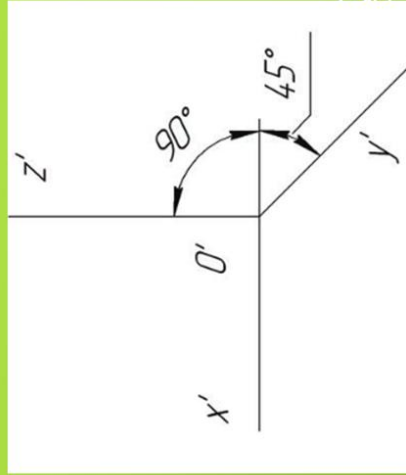
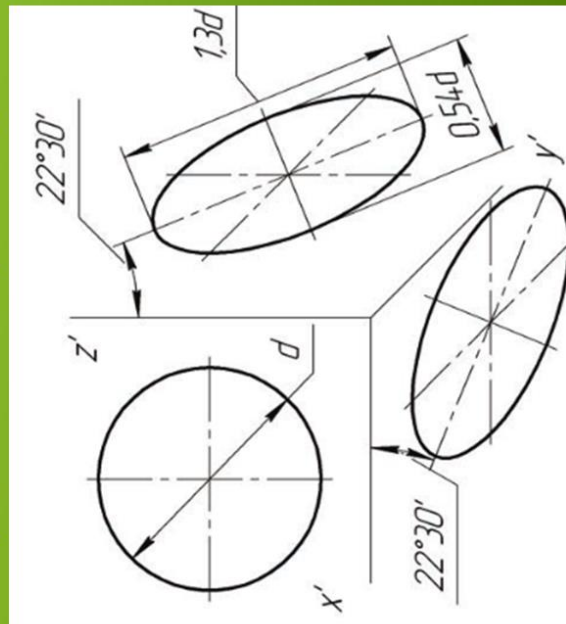


Косокутна фронтальна ізометрія

Схеми систем опалення, вентиляції і кондиціонування повітря рекомендується виконувати у косокутній фронтальній ізометрії (ДСТУ Б А.2.4-41:2008).

На рисунку наведено розташування осей в косокутній фронтальній ізометрії. Зображення в косокутній фронтальній ізометрії виконується без спотворення за осями.

Коефіцієнти спотворення однакові $u = v = w = 1$.



Кола, які належать фронтальним площинам, проєкціюються в кола, а ті, що належать горизонтальним та профільним площинам, проєкціюються в еліпси, великі осі яких дорівнюють $1.3d$, а малі— $0.54d$, де d - діаметр кола.

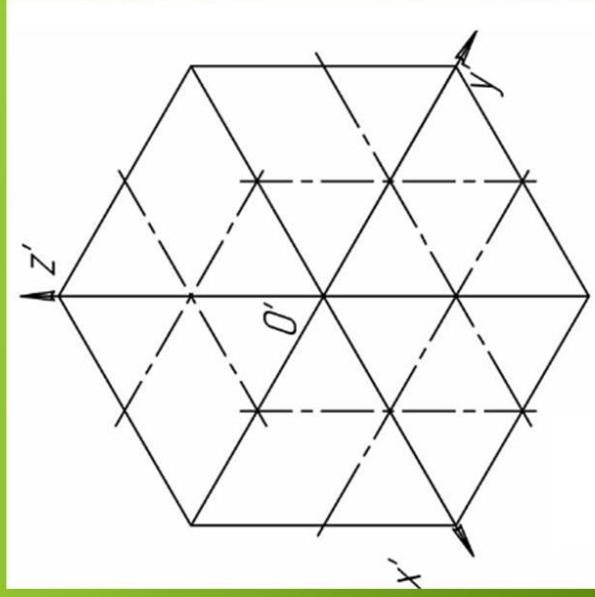
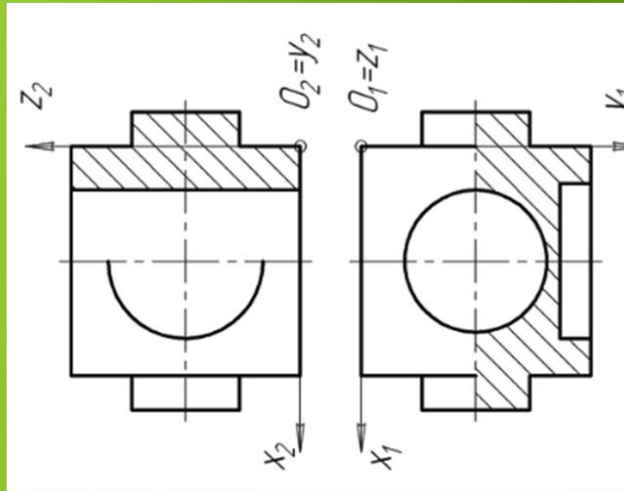
Алгоритм побудови аксонометрії деталі

Побудуємо куб з наскрізним вертикальним циліндричним отвором та двома циліндричними виступами й впадинами, якій заданий на кресленнику.

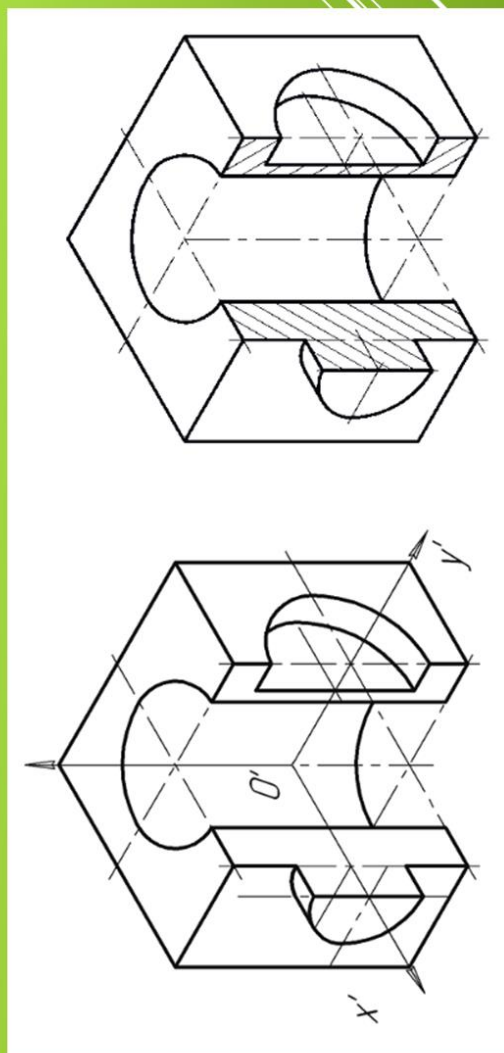
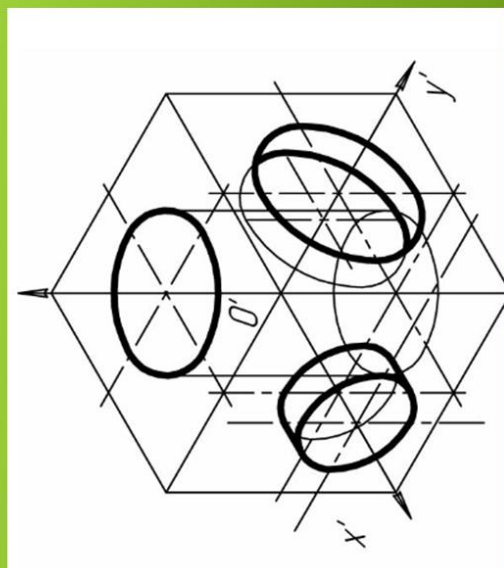
Передусім введемо систему координат так, щоб її початок знаходився у нижній правій дальній вершині.

Потім будуємо основну геометричну форму – куб.

Проводимо осі основ циліндричних поверхонь отвору, виступів та впадин.



Креслимо задані отвори та виступи.
Наприкінці будують виріз передньої лівої частини деталі координатними площинами та заштриховують перерізи.



Слід наголосити на тому, що побудоване наочне зображення деталі — це перш за все кресленик, згідно якому мають бути виявлені всі розміри деталі. Тому необхідно стежити за тим, щоб на ізометричному зображенні були позначені штрих-пунктирною лінією осі усіх поверхонь обертання.

Висновки

1. Аксиометричні проєкції – це паралельні проєкції, у яких напрям проєкціювання не паралельний жодній координатній осі.
2. Перехід між ортогональними проєкціями і аксиометричними здійснюється за допомогою коефіцієнтів спотворення.
3. Найбільш розповсюджені прямокутні ізометрія та диметрія.
4. Проєкцією кола в аксиометрії в загальному випадку є еліпс, який для спрощення креслення дозволяється замінювати овалом.

Питання та завдання для самоперевірки

1. Що таке аксонометрична проекція?
2. З якою метою застосовується приведена аксонометрична проекція?
Чим вона відрізняється від точної?
3. На які два види поділяються аксонометричні проекції?
4. Що таке показники спотворення?
5. Як розташовані великі осі еліпсів — проекцій кіл у прямокутній аксонометрії?
6. Як виконується штрихування перерізів, що розташовані в координатних площинах у прямокутній диметрії?

Лекція 6. Перетин поверхні з площиною

Лекція присвячена побудові ліній перетину гранних та кривих поверхонь площиною та побудові розгорток цих поверхонь.

На лекції розглядається алгоритм розв'язку задачі побудови перерізу поверхні площиною окремого положення.

Наведені приклади розв'язку задачі побудови лінії перерізу січною площиною багатогранної поверхні, циліндра, конуса, сфери. Проаналізована форма лінії перетину в залежності від положення січної площини відносно поверхні.

Наводяться приклади перетину поверхні з площиною загального положення.

На лекції розглядається визначення розгорток поверхонь, їх основні властивості.

Розглянуті розгортки багатогранників, наведений приклад побудови розгортки піраміди способом розкочування. Побудова розгорток розгортних кривих поверхонь проілюстрована на прикладі виконання розгортки відсіку циліндра обертання. Наведені принципи побудови розгорток кривих нерозгортних поверхонь за допомогою їх апроксимації гранними.

ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА

Лекція 6.

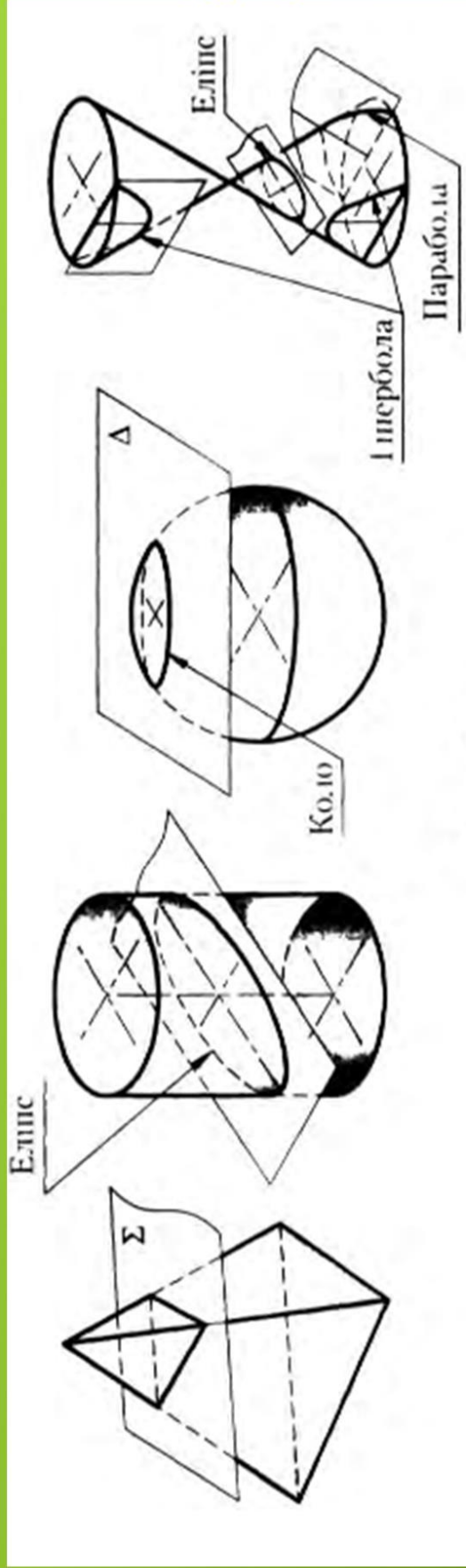
Переріз поверхонь площинами.
Розгортки

Основні питання

1. Методика побудови лінії перерізу поверхні площиною.
2. Переріз поверхонь площинами окремого положення.
3. Переріз поверхонь площинами загального положення.
4. Розгортки поверхонь.
5. Висновки.

Методика побудови лінії перерізу поверхні площиною

Переріз поверхні тіла площиною – це **плоска геометрична фігура**, що утворюється в січній площині та містить множину точок, які одночасно належать геометричному тілу та площині. **Фігуру перерізу обмежує лінія перерізу.**



Форма лінії перетину залежить від форми поверхні та взаємного положення поверхні та січної площини.

Для побудови лінії перерізу насамперед визначають **вид лінії перерізу**. При перетині гранних поверхонь площиною отримують багатокутник. При перерізі кривих поверхонь площиною отримують, у загальному випадку, криву лінію. Потім визначають її **характерні точки**, які доповнюють проміжними у тих місцях, де характерних недостатньо для з'єднання точок плавною кривою.

Характерні точки:

- точки з екстремальними координатами (найвища, найнижча, найлівіша, найправіша, найближча та найдалша);
- точки, які розташовані на обрисних твірних поверхні на усіх площинах проекцій;
- точки, які є характерними для кривих перерізу (точки на кінцях великої та малої осей еліпсу, вершини багатокутників та ін.)

Задача на побудову лінії перерізу поверхні тіла площиною включає наступні етапи.

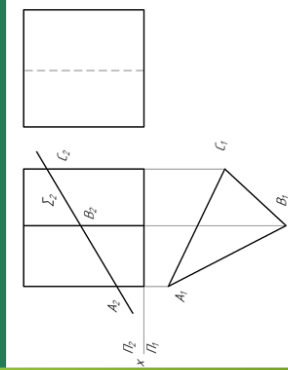
1. Побудова проекцій лінії перерізу.
2. Визначення натуральної величини фігури перерізу.
3. Побудова розгортки поверхні з нанесенням лінії перерізу.

На комплексному кресленку побудова лінії перерізу значно спрощується, якщо січна площина займає окреме положення у просторі. Тому спочатку розглянемо алгоритм визначення лінії перерізу поверхонь площинами окремого положення.

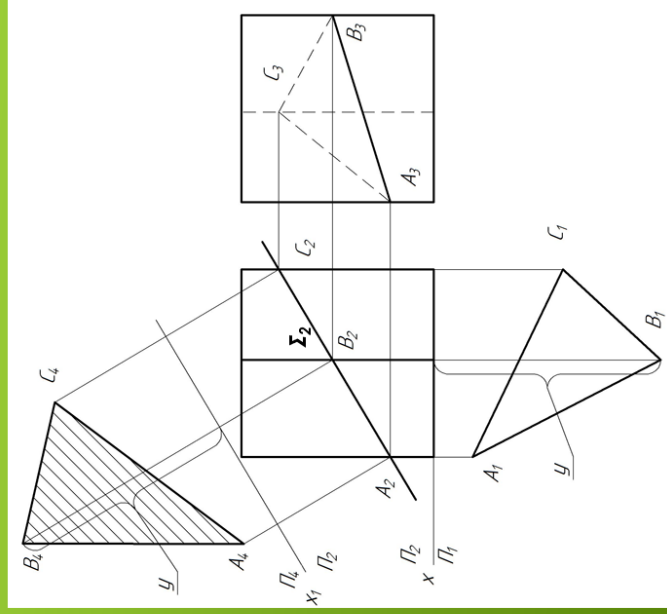
Переріз поверхонь площинами окремого положення

Переріз гранних поверхонь площинами.

Переріз призми площиною.

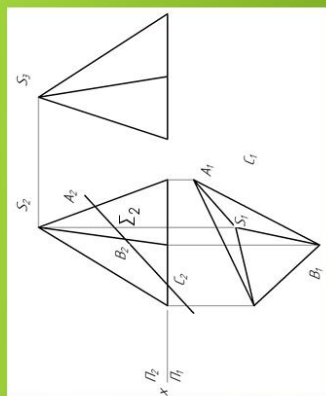


Січна площина перетинає всі бічні ребра трикутної призми, тому у перерізі – трикутник. 1. Фігура перерізу належить січній площині, тому її **фронтальна проекція** належить фронтальному сліду проекції площини.



2. Фігура перерізу належить також призмі, тому її **горизонтальна проекція** співпадає з горизонтальною проекцією призми.
3. **Профільну проекцію** лінії перерізу побудуємо за належністю вершин трикутника перерізу відповідним ребрам призми.
4. Визначимо **видимість** сторін трикутника перерізу. Праве ребро призми не видно на Π_3 , тому й вершина **С** на Π_3 теж невидима. Невидимі сторони **АС** та **ВС** (вони наведені штриховою лінією).
5. Для визначення **натуральної величини** перерізу слід скористатися **методом заміни площин проекцій**.

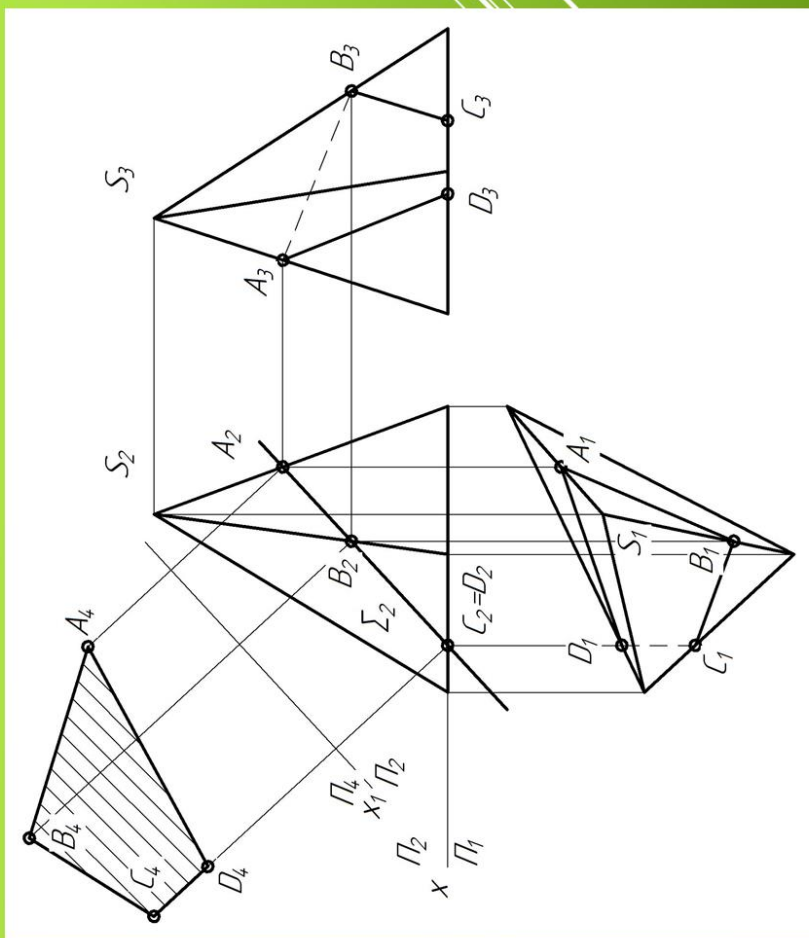
Переріз піраміди площиною



Січна площина перетинає два бічних ребра та площину основи. В перерізі – чотирикутник.

1. **Фронтальна проекція** фігури перерізу належить фронтальному сліду-проекції.
2. **Горизонтальну та профільну** проекції лінії перетину будуюмо за умовою належності вершин чотирикутника ребрам піраміди.

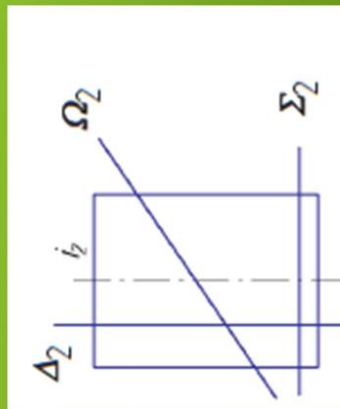
3. **Видимість** фігури перерізу визначаємо на Π_1 – невидима сторона **CD**, яка належить основі піраміди, та на Π_3 – невидима сторона **AB** на правій грани піраміди.
4. **Натуральну величину** фігури перерізу будуюмо методом **заміни площин проекції**.



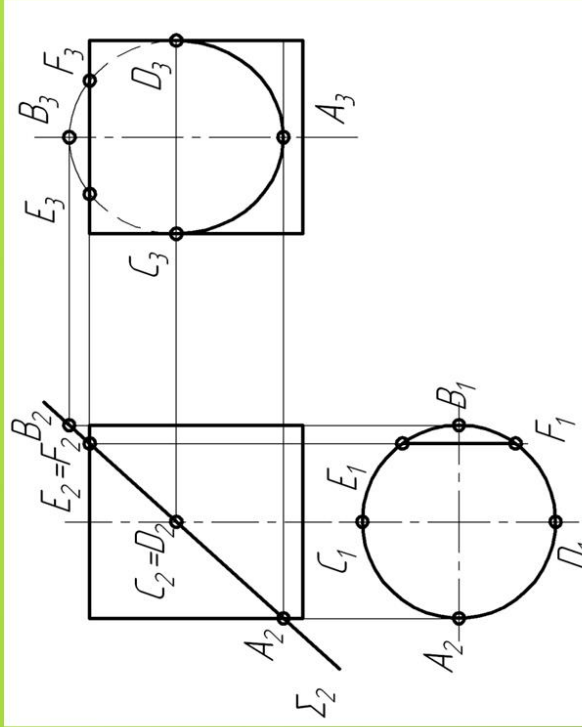
Переріз криволінійних поверхонь площиною.

Переріз циліндра площиною

В залежності від розташування січної площини відносно поверхні циліндра обертання лінія перетину може бути еліпсом, колом чи прямокутником.



- якщо січна площина $\Delta\Omega_2$ розташована похило до осі обертання i , в перерізі — еліпс;
- якщо січна площина $\Sigma\Sigma_2$ перпендикулярна до осі i , маємо коло;
- якщо січна площина $\Delta\Delta_2$ паралельна осі обертання i , в перерізі — прямокутник, дві сторони якого є частинами твірних циліндра.



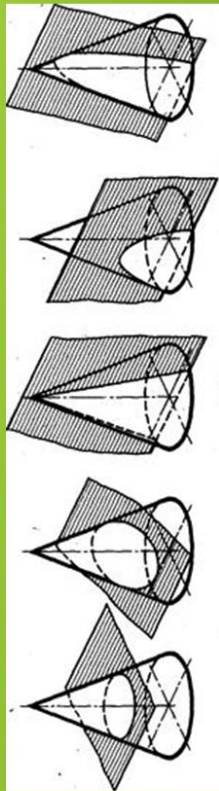
Побудована лінія перетину циліндра з фронтально-проекціуючою площиною $\Sigma(\Sigma_2)$.

Для кривих лінії перерізу їх проекції будуються **методом повного перерізу**.

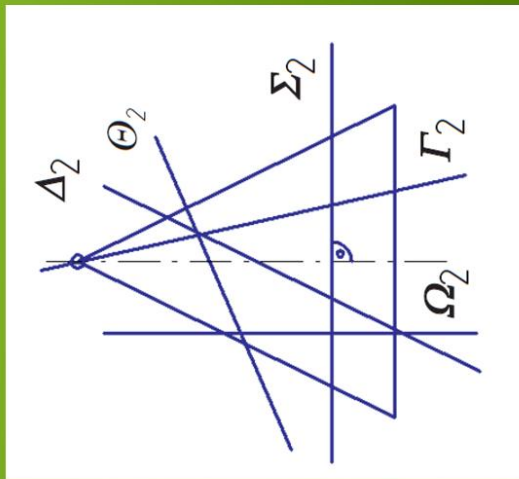
Для цього циліндрична поверхня продовжується до повного перетину з січною площиною. Визначається повний переріз поверхні, а потім виділяється та його частина, яка належить поверхні геометричного тіла. На кресленку площина перетинає циліндр по частині еліпса **ECADF**, яка більша ніж половина.

Переріз конічної поверхні площиною

В залежності від взаємного положення січної площини та поверхні площина може перетнути конічну поверхню в точці, по двом твірним, колу, еліпсу, параболі, гіперболі або торкнутися до неї по твірній. Розглянемо найбільш цікаві випадки.

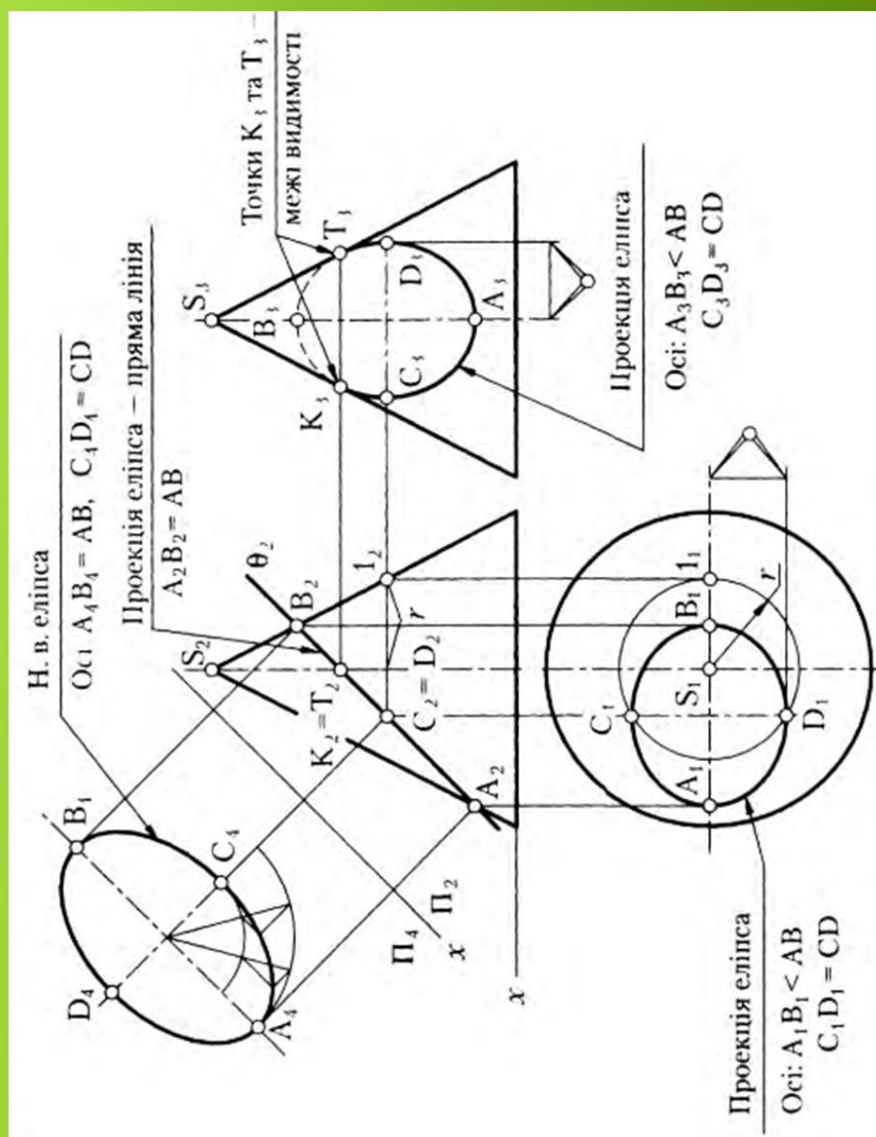


- коло, якщо площина $\Sigma(\Sigma_2)$ перпендикулярна до осі обер-тання;
- еліпс, якщо площина $\Theta(\Theta_2)$ перетинає усі твірні конуса, та розташована під гострим кутом до осі обер-тання;
- парабола, якщо площина $\Delta(\Delta_2)$ паралельна одній твірній конуса;
- гіпербола, якщо площина $\Omega(\Omega_2)$ паралельна двом твірним конуса;
- трикутник, дві сторони якого — твірні конуса, якщо площина $\Gamma(\Gamma_2)$ проходить через вершину конуса.



Побудова лінії перетину конуса по колу дуже проста, тому розглядати її не будемо.

Переріз конуса по еліпсу



Якщо січна площина перетинає всі твірні конуса, то в перерізі буде еліпс.

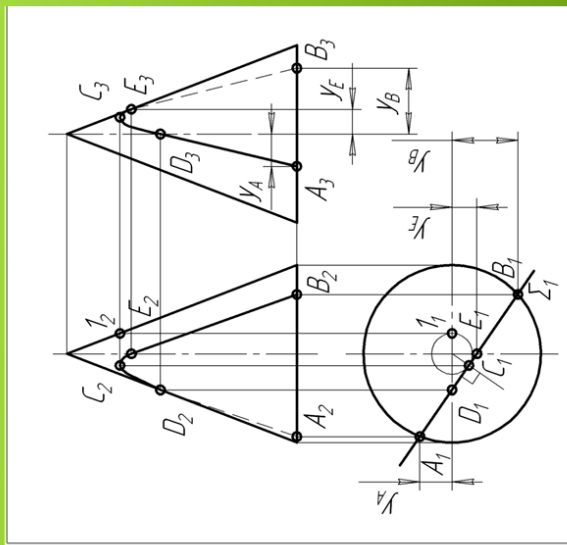
Позначимо його осі: **AB** – велика вісь, **CD** – мала вісь. Мала вісь перпендикулярна великій та перетинає її в середині **$A_2C_2 = C_2B_2$** .

Фронтальна проекція еліпса – **відрізок** прямої **A_2B_2** , що належить сліду-проекції **θ_2** площини **θ** , а **горизонтальна** та **профільна** – **еліпси**.

Точки **K** й **T** – межі видимості на **Π_3** .

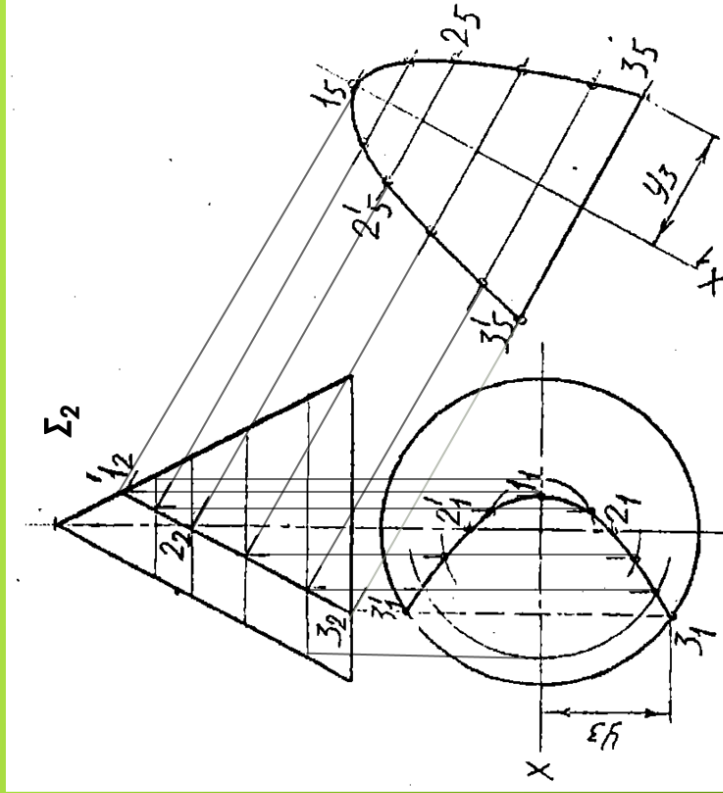
Натуральна величина еліпса побудована методом заміни площин проекцій.

Переріз конуса по гіперболі



Січна площина паралельна осі конуса, тому перетинає його по гіперболі. Її горизонтальна проекція – відрізок A_1B_1 , що розташований на сліди-проекції Σ_1 . Фронтальна та профільна проекції – дуги гіпербол, які обмежені точками A та B . Вершина C гіперболи побудована у найвищій точці гіперболи на найменшій її паралелі.

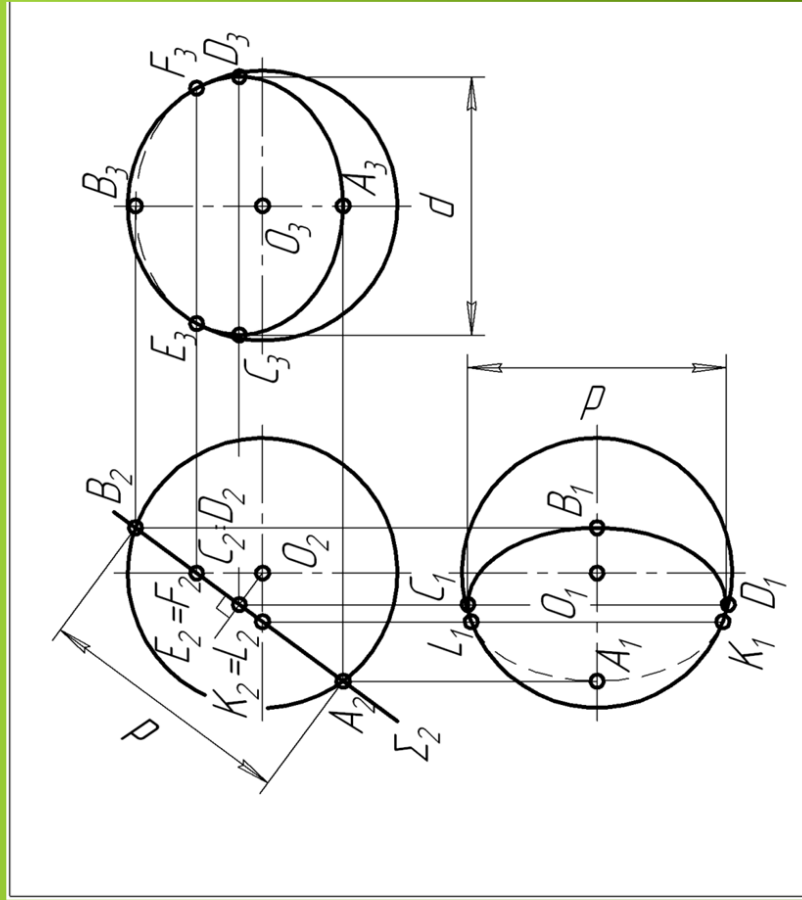
Переріз конуса по параболі



Січна площина паралельна одній твірній конуса, тому перетинає його по параболі. Точки 3 і $3'$ – кінці дуги параболі, точка 1 – вершина параболі, точки 2 і $2'$ – межа видимості кривої на Π_3 . Проміжні точки не позначені літерами.

Переріз сфери площиною

Площина перетинає сферу завжди по **колу**.



Площина Σ перетинає сферичну поверхню по колу діаметром d .

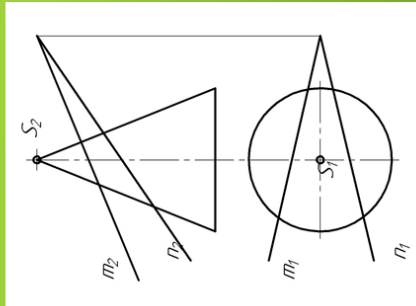
Його **фронтальна** проекція - **відрізок** прямої A_2B_2 , що належить сліду-проекції площини Σ_2 . **Горизонтальна** та **профільна** проекції кола - **еліпси**, великі осі яких дорівнюють діаметру d кола перерізу.

Малі осі еліпсів визначаються за лініями проекційного зв'язку.

Точки K та L , які розташовані на екваторі сфери, визначають межу видимості на Π_1 . Точки E та F визначають межу видимості на Π_3 .

Натуральну величину фігури перерізу можна визначити без застосування метода заміни площин проекцій. Це **коло** діаметра d .

Переріз поверхонь площинами загального положення



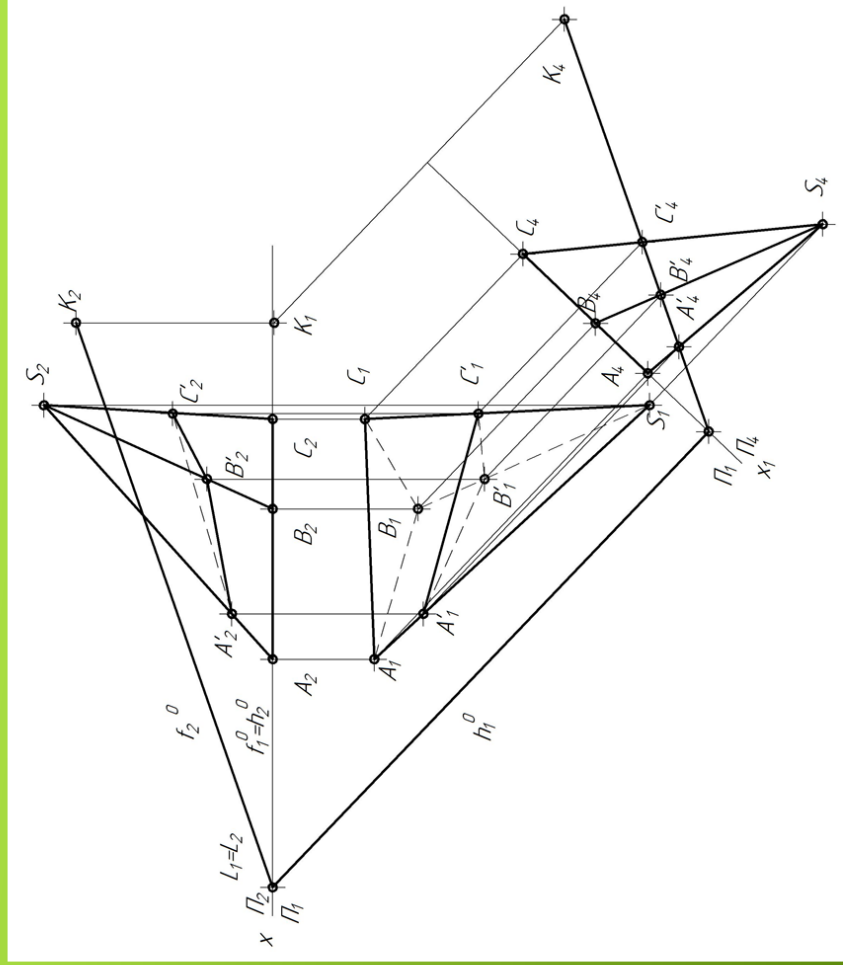
Як перетинає площа
загального положення цей
конус?

По кресленіку навіть
неможливо стверджувати,
що вона його перетинає.

Тому, якщо площа займає загальне положення в просторі, її необхідно перетворити у площину

окремого положення. Тоді задача зводиться до попередньої.

На кресленіку побудована лінія перетину трикутної піраміди площиною загального положення, яка задана лініями нульового рівня.

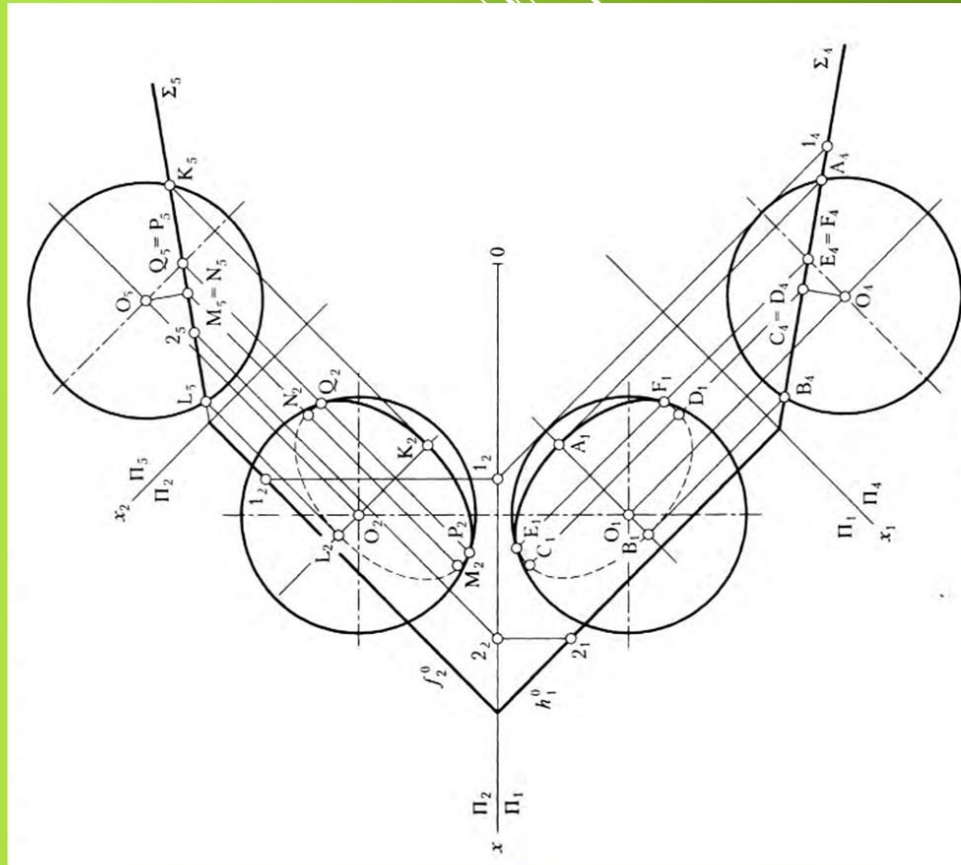


Для побудови лінії перетину сферичної поверхні площиною загального положення необхідно виконати дві заміни площин проекції.

Площина Π_4 введена перпендикулярно площині Π_1 та h^0 заданої січної площини. Тоді січна площина перетворюється на проєкцію кола побудова горизонтальної проєкції кола перетину сфери з площиною зводиться до розв'язку попередньої задачі.

Площина Π_5 введена перпендикулярно площині Π_2 та f^0 заданої січної площини для визначення фронтальної проєкції кола перетину сфери з площиною.

Проекційний зв'язок між точками горизонтальної та фронтальної проєкції кола не встановлюється. Обидві проєкції будуються незалежно одна від одної.



Розгортки поверхонь

Розгорткою гранної поверхні називається плоска фігура, яка одержана послідовним суміщенням граней гранної поверхні з площиною розгортки.

На розгортці всі довжини ліній та кути між лініями зображуються в натуральну величину.

Тому для побудови розгортки необхідно визначити натуральні величини всіх ребер поверхні.

Для побудови розгортки **криві поверхні апроксимуються** (замінюються з достатньою точністю) **гранними** поверхнями (зазвичай в криву поверхню вписують багатогранник, наприклад, призму або піраміду) та будують їх наближені розгортки.

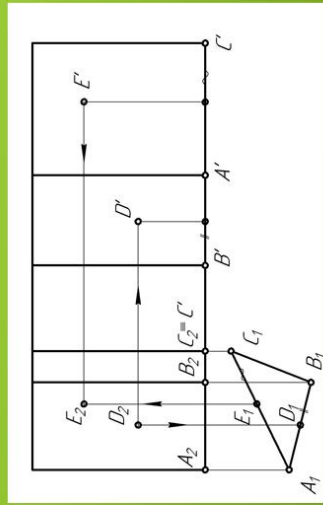
Найкоротша лінія між двома точками на поверхні називається геодезичною. На розгортці поверхні геодезична лінія є відрізком прямої.

Для побудови геодезичної лінії на проєкціях поверхні необхідно:

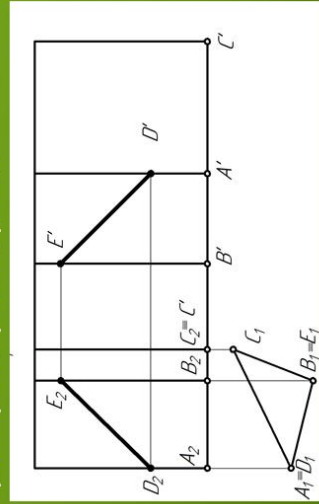
- побудувати розгортку поверхні та нанести на ній граничні точки геодезичної лінії;
- з'єднати на розгортці граничні точки відрізком прямої;
- визначити проміжні точки геодезичної лінії на розгортці та перенести їх на проєкції;
- з'єднати отримані точки на проєкціях поверхні кривою або ламаною лінією, в залежності від типу поверхні.

Властивості розгортки

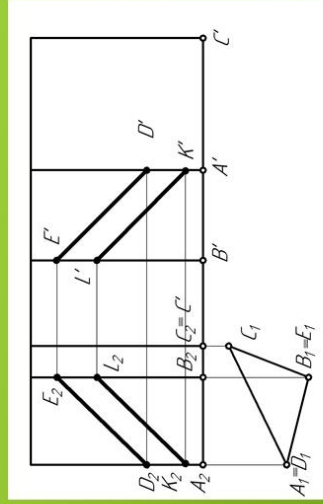
1. Між точками поверхні та її розгортки існує **взаємно однозначна відповідність**.



2. Пряма на поверхні переходить в пряму на розгортці.

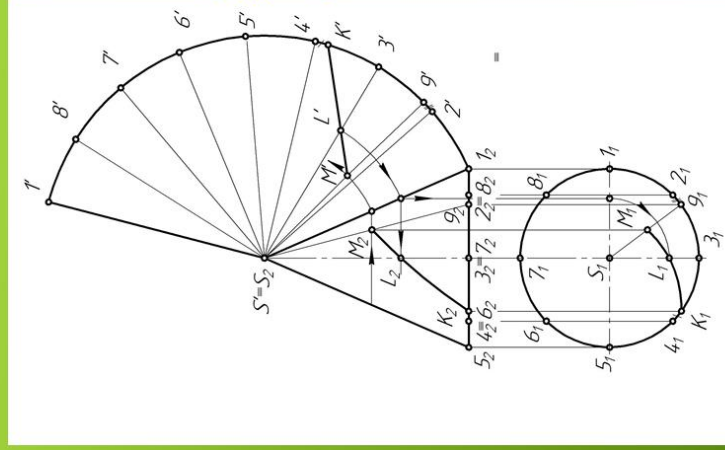


3. Паралельні прямі на поверхні переходять в паралельні прямі на розгортці.



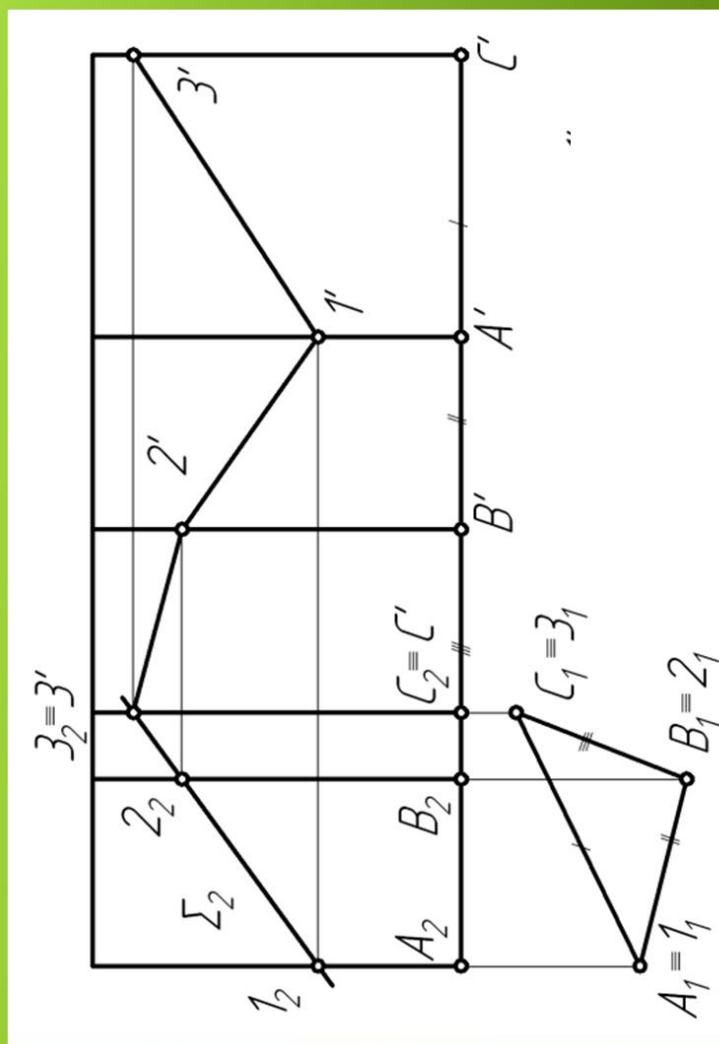
4. Площа фігури на розгортці дорівнює її площі на поверхні.

Зберігаються довжини ліній та кути між ними.



5. Пряма на розгортці **не завжди** переходить в пряму на поверхні.

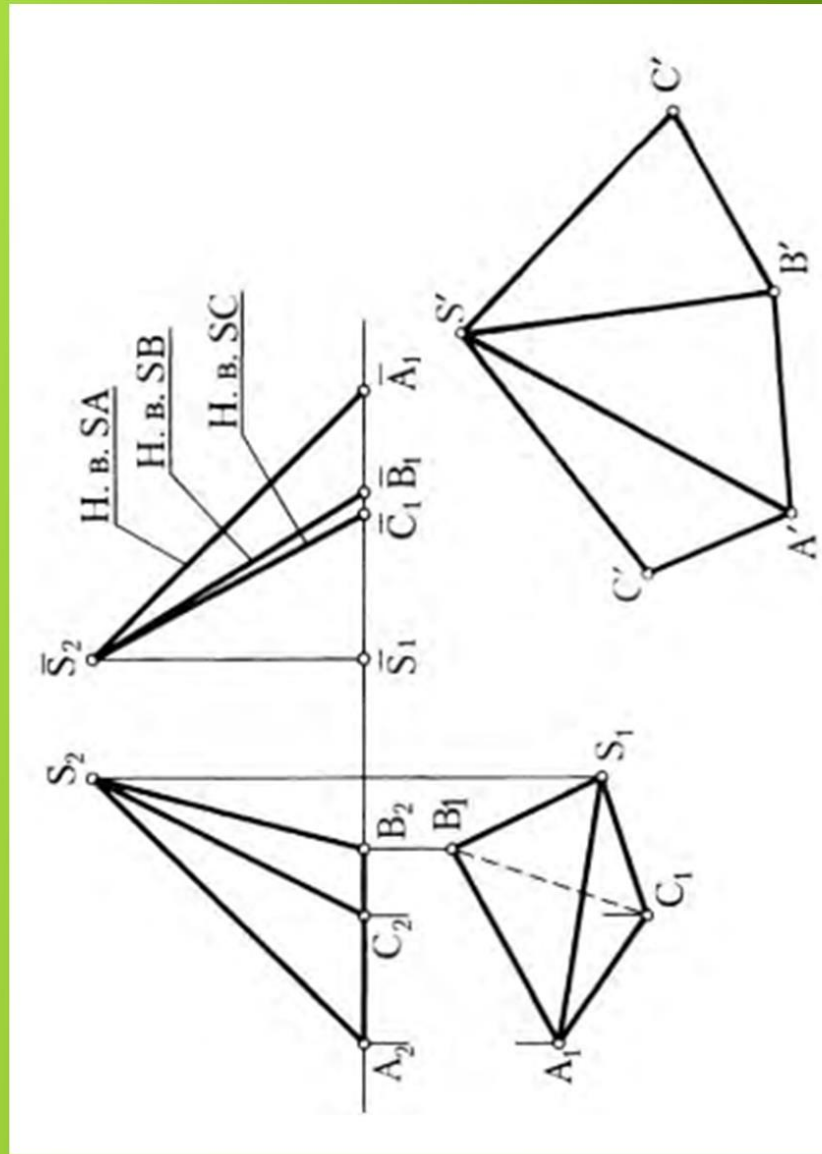
Розгортка прямої призми з нанесенням лінії перерізу її фронтально-проекціюючої площиною $\Sigma(\Sigma_2)$.



Ребра призми перпендикулярні площині основи, тому трикутник основи розгортається у відрізок прямої, довжина якого дорівнює периметру трикутника. Бічна поверхня призми розгортається у прямокутник, висота якого дорівнює висоті призми. Розгортка побудована на продовженні фронтальної проекції призми.

Лінія перерізу побудована по умові належності вершин трикутника перерізу відповідним ребрам призми.

Розгортка піраміди.



Розгорткою бічної поверхні трикутної піраміди є сукупність трьох трикутників, відповідно рівних трикутникам бічних граней.

Для побудови розгортки піраміди слід визначити натуральні величини ребер піраміди. Її основа $\triangle ABC$ належить горизонтальній площині проекції, тому її ребра AB , BC та AC проєкціюються на Π_1 в натуральну величину.

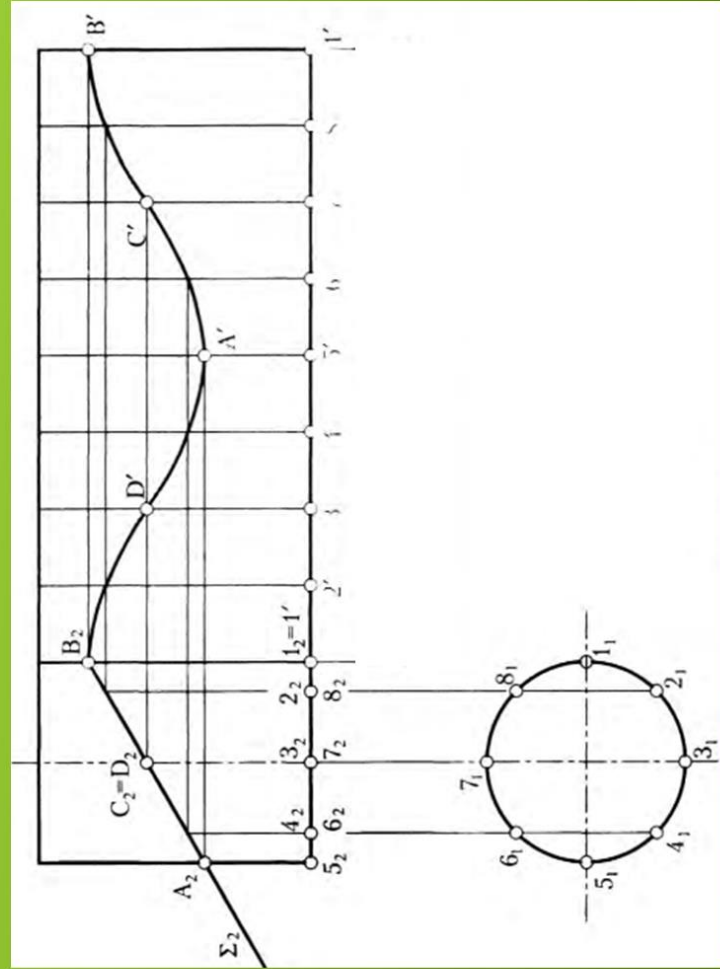
Для визначення довжин бічних ребер застосований метод плоско-паралельного переміщення.

На розгортці $\triangle A'S'C'$, $\triangle A'B'S'$ та $\triangle B'C'S'$ побудовані за трьома сторонами.

Розгортка кривих поверхонь

Для побудови розгортки **криві поверхні апроксимуються гранними** поверхнями. Розгортка буде наближеною.

Розгортка циліндра обертання



Розгорткою циліндра обертання є прямокутник довжиною, яка дорівнює $2\pi r$, де r - радіус кола основи. Висота прямокутника дорівнює висоті циліндра. При графічній побудові замість довжини кола відкладають **периметр основи правильної призми**, яку вписують у циліндр. Чим більше вершин у призми, тим точніше буде розгортка циліндра.

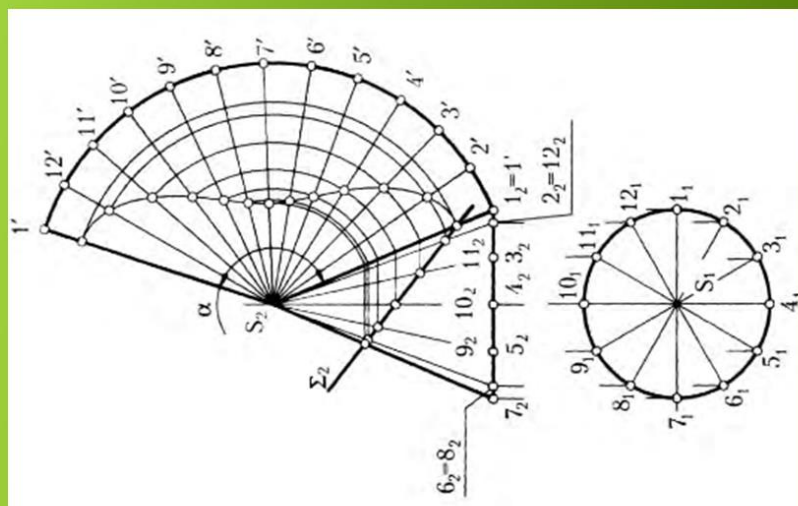
На прикладі у циліндр вписана правильна восьмикутна призма. Розгортка побудована на продовженні фронтальної проєкції.

На горизонтальній прямій відкладаються довжини хорд **1-2, 2-3, 3-4**, та ін., які вимірюються на Π_1 .

На розгортці побудована лінія перерізу циліндра фронтально-проєкціуючою площиною.

Розгортка конуса обертання

Розгорткою конуса обертання буде круговий сектор, радіус якого дорівнює довжині твірної конуса.



Для побудови розгортки конуса в нього вписана правильна 12-кутна піраміда. Розгортка побудована на продовженні фронтальної проекції піраміди. Оскільки обрисна твірна на Π_2 проєкціюється в натуральну величину, з вершини S_2 побудований круговий сектор, та від точки 1_2 на дузі кола послідовно відкладені відрізки, які дорівнюють сторонам 12-кутника основи вписаної піраміди.

В першому прикладі побудована лінія

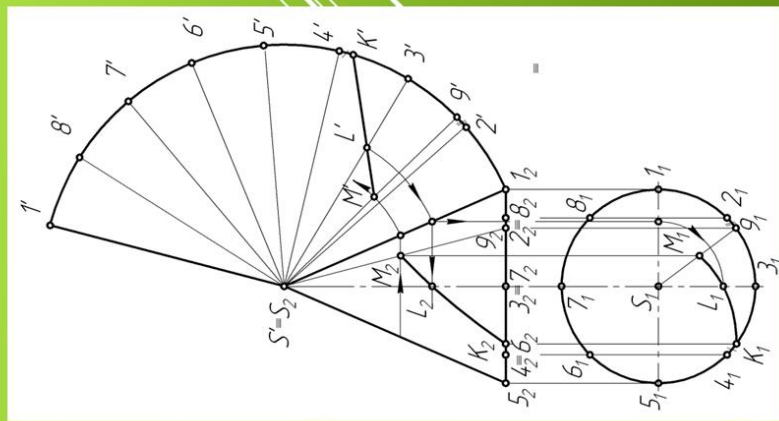
перерізу конуса проєціюючею площиною.

Для цього точки лінії перерізу на фронтальній проекції переносяться на обрисну твірну по паралелям (на Π_2 – відрізки), та на розгортку на відповідні твірні також по паралелям (на розгортці – дуги кіл).

У другому прикладі побудована геодезична

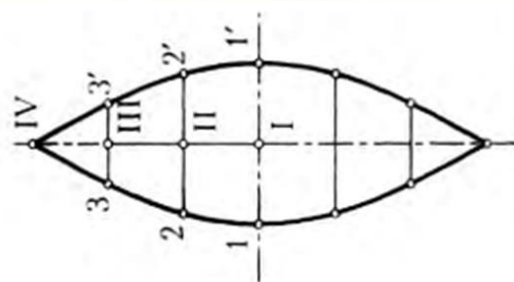
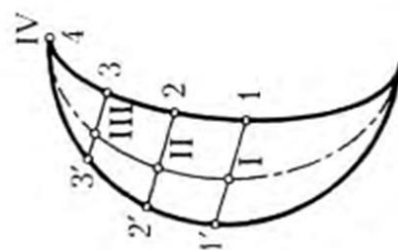
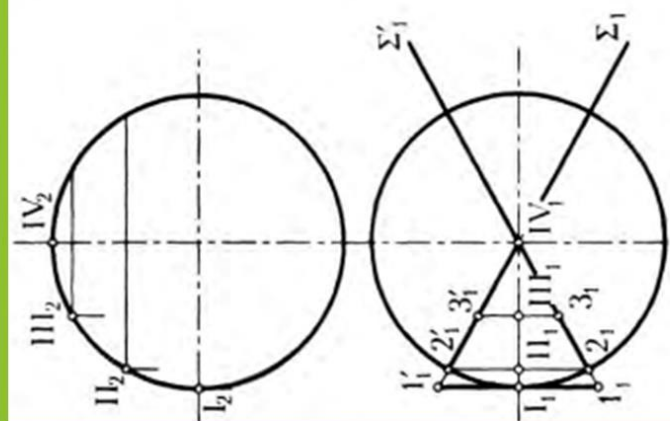
лінія, яка дає найкоротшу відстань між точками поверхні по цій поверхні.

На розгортці геодезична лінія – відрізок прямої.



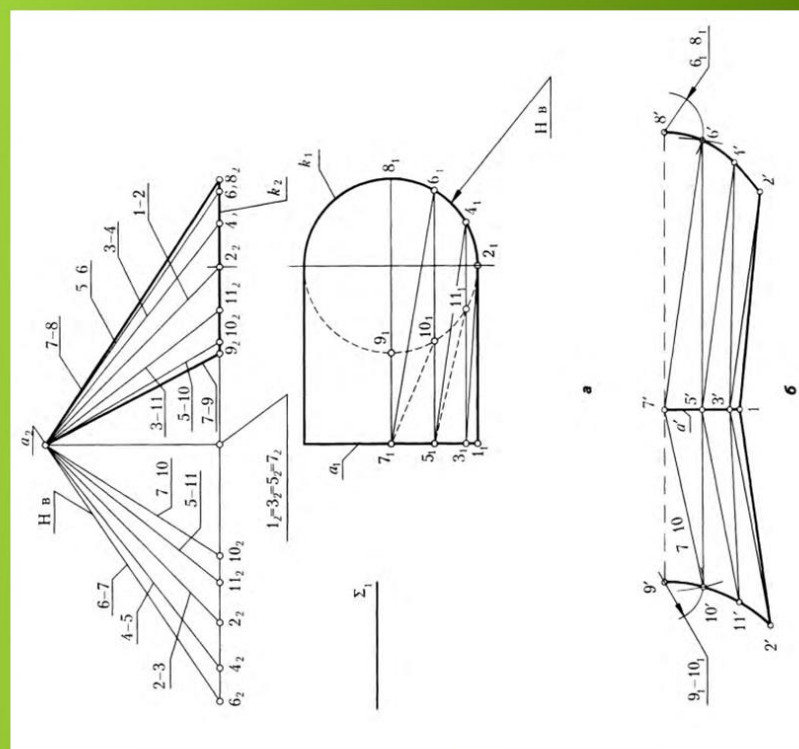
Розгортки нерозгортних поверхонь

Для нерозгортних поверхонь також будуються розгортки. Для цього виконується кусочна апроксимація цих поверхонь розгортними поверхнями, які й розгортаються. **Такі розгортки називаються умовними.**
 Приклад. Розгортка сфери.



Сфера розділена горизонтально-проекційними площинами на 6 рівних частин. Кожна з частин апроксимується циліндричною поверхнюю, для якої будується розгортка. Розгортка сфери складається з шістьох пелюсток – розгортки циліндричних фрагментів.

Часто нерозгортні поверхні апроксимують багатогранниками. Такий метод називається **тріангуляцією**.
На прикладі побудована розгортка коноїда методом тріангуляції.



Напрямними коноїда є пряма **a** та коло **k**. Площа паралелізму Σ – фронтальна площина. Поверхню замінують багатогранником із трикутними гранями **7-8-9**, **6-7-5**.... Визначають сторони трикутників **6-7**, **4-5** .. Побудову розгортки починають з відрізка прямої **a**, який проєкціюється на Π_1 в натуральну величину. На кресленку побудована половина розгортки, що обмежена віссю симетрії **8-9**. Трикутники побудовані за трьома сторонами.

Висновки

1. Форма лінії перерізу поверхні площиною залежить від форми поверхні та положення площини відносно поверхні.
2. В перерізі граничних поверхонь площинами утворюються багатокутники, а кривих, у загальному випадку, – криві лінії.
3. Лінія перерізу поверхні площиною окремого положення будується найпростіше.
4. Для побудови лінії перетину поверхні площиною загального положення зазвичай застосовується метод заміни площин проекцій.
5. Найкоротшу відстань між двома точками по поверхні надає геодезична лінія, яка на розгортці поверхні є відрізком прямої.
6. Для кривих розгортних поверхонь застосовуються наближені розгортки, а для нерозгортних – умовні.

Питання та завдання для самоперевірки

1. Які точки треба визначити для побудови лінії перетину поверхні з площиною?
2. З якою метою застосовуються проміжні точки при визначенні лінії перетину площини з поверхнею?
3. По якій лінії перетинається площина зі сферою? Як проєкціюється ця лінія на площини проєкцій?
4. Що таке розгортка поверхні?
5. Як будується геодезична лінія поверхні?
6. Як будуються розгортки нерозгортних поверхонь?

Лекція 7. Побудова лінії перетину тіл складної геометричної форми

На лекції «Побудова лінії перетину тіл складної геометричної форми» розглядається одна із найважливіших заключних тем у вивченні дисципліни «Інженерна графіка». При вирішенні задач цієї теми студенти використовують знання та навички, набуті при вивченні попередніх тем усього курсу.

На лекції надається загальний алгоритм побудови лінії перетину заданої геометричної фігури двома отворами – вертикальним (заданим вигляді призм, циліндрів, конусів) і фронтально-проекціюючим (як правило, призматичним) отвором.

Задача полягає в побудові лінії перерізу заданої фігури з призматичним отвором і вирішується поетапно.

Етап 1. Аналіз графічної умови з визначенням вигляду геометричних поверхонь, які обмежують задане тіло.

Етап 2. Побудова лінії перетину наскрізного призматичного отвору (вирізу) із зовнішньою поверхнею тіла.

Етап 3. Побудова лінії перетину наскрізного призматичного отвору (вирізу) з внутрішньою поверхнею тіла.

Етап 4. Для виявлення форми внутрішньої порожнини виконуються корисні розрізи.

ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА

Лекція 7.

Одинарне та подвійне проникання

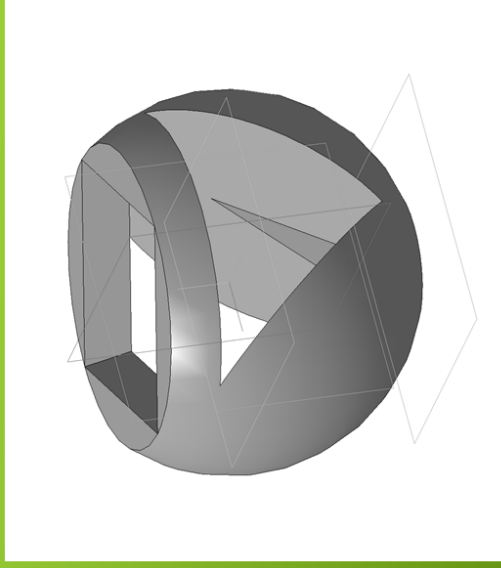
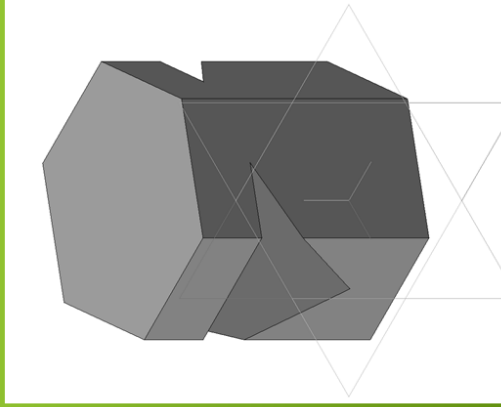
Активация Windows
Чтобы активировать Windows, перейдите в раздел "Параметры".

Основні питання

1. Постановка задачі
2. Побудова точок на поверхнях.
3. Побудова ліній перерізу поверхонь проєкціючими площинами
4. Побудова ліній перетину поверхні заданого тіла наскрізних призматичним вікном (одинарне проникання)
5. Побудова ліній перетину поверхні заданого тіла з отвором наскрізним призматичним вікном (подвійне проникання)
6. Висновки.

Постановка задачі

Задача побудови одинарного та подвійного проникання геометричних об'єктів складається з визначення видів та розрізів геометричного тіла та побудови лінії перетину призматичного отвору з зовнішньою поверхнюю та вертикальним отвором.



Геометричні тіла можуть бути обмежені наступними поверхнями:

- призматичною;
- пірамідальною;
- циліндричною;
- конічною;
- сферичною.

Призматичний отвір, зазвичай, має трикутну, прямокутну або трапецеїдальну форму.

Для успішного розв'язку цієї задачі необхідно :

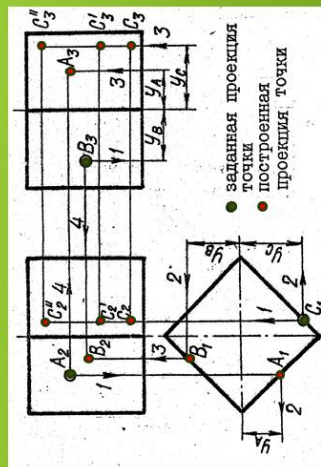
- вміти будувати точки на зазначених поверхнях;
- вміти будувати лінії перерізу зазначених поверхонь площинами;
- знати положення стандартів на застосування та розташування видів та розрізів на кресленнях.

Підготували: вчитель математики Ірина Іванівна

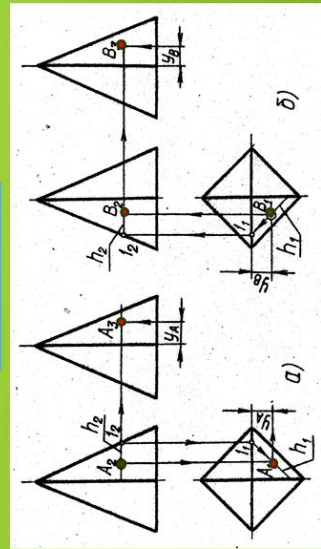
Побудова точок на поверхнях

Розглянемо побудову відсутніх проєкцій точок на простіших поверхнях

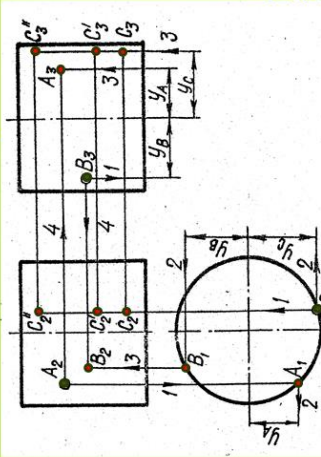
Призма



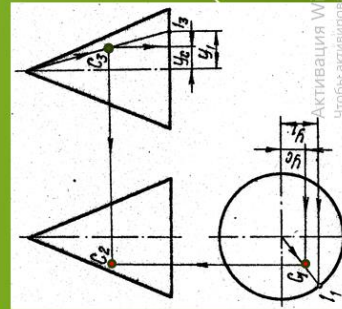
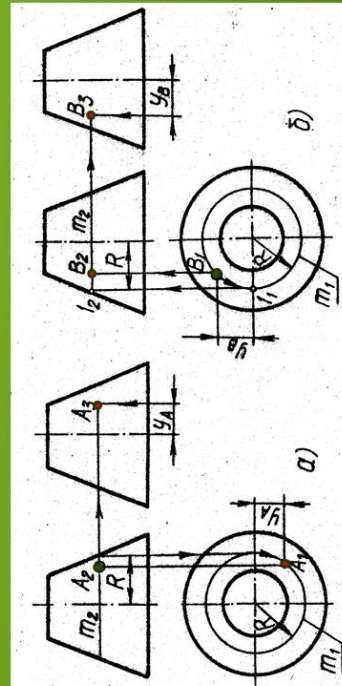
Піраміда



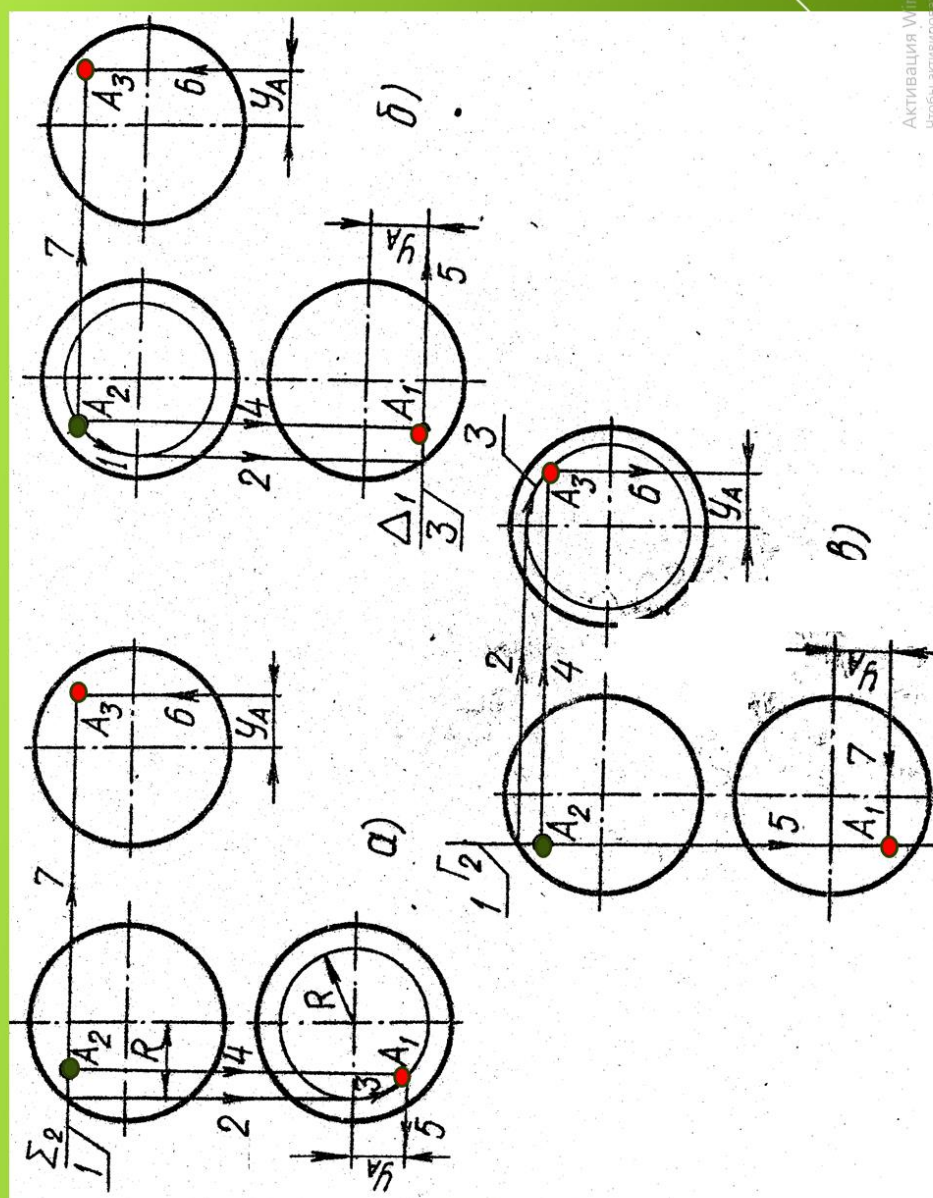
Циліндр



Конус



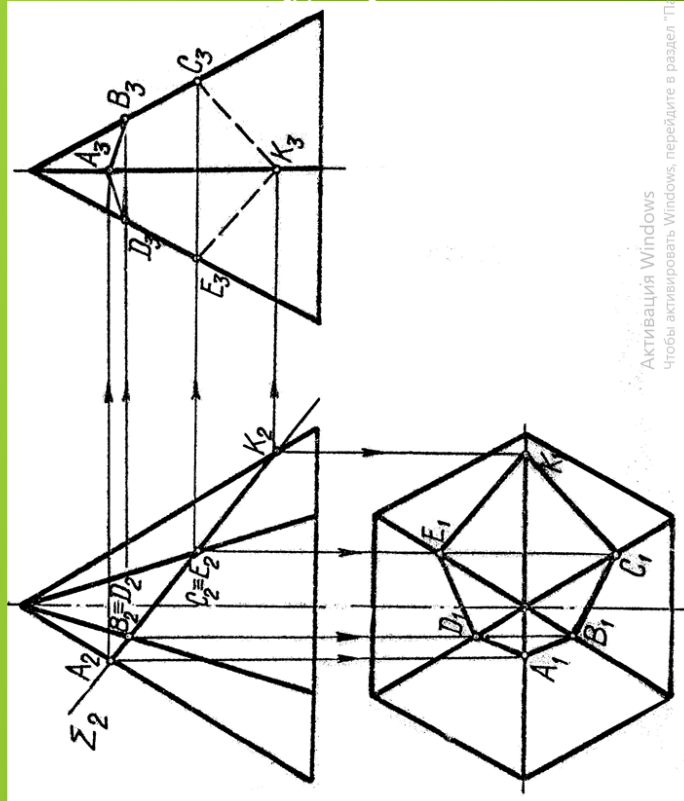
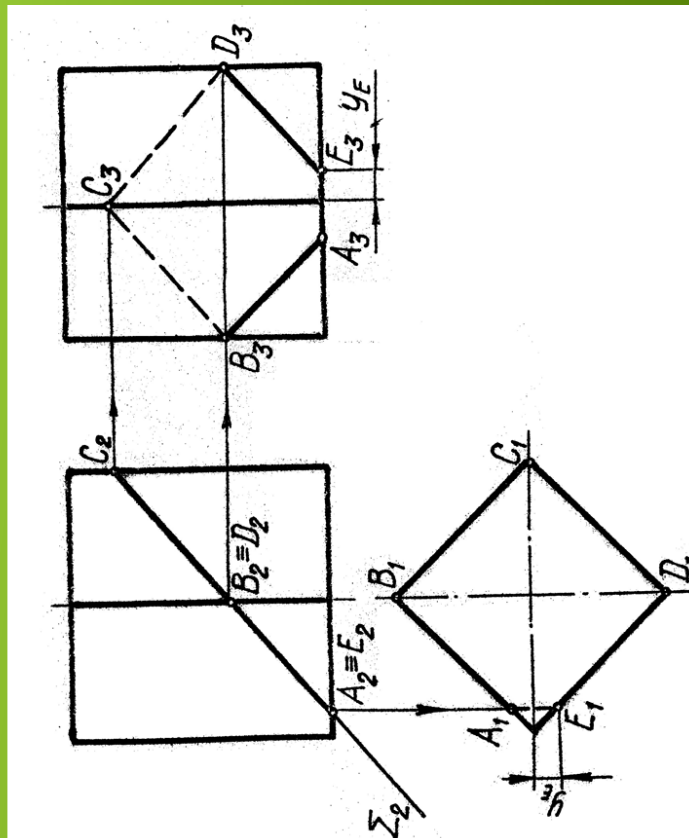
Активация Windows
Чтобы активировать Windows, перейдите в раздел "Параметры".



Побудова ліній перерізу поверхонь проєкціючими площинами

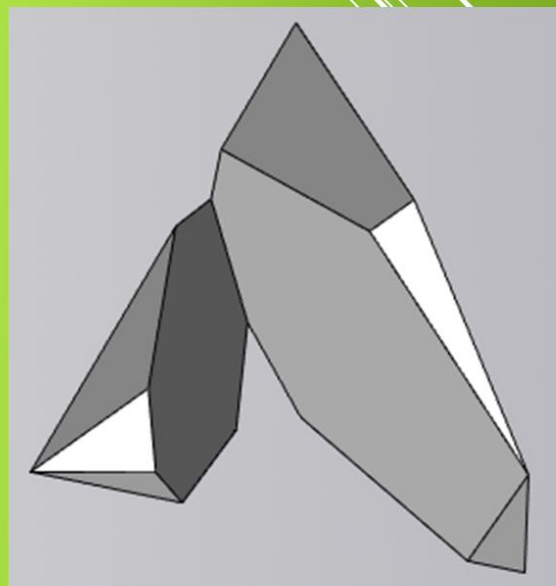
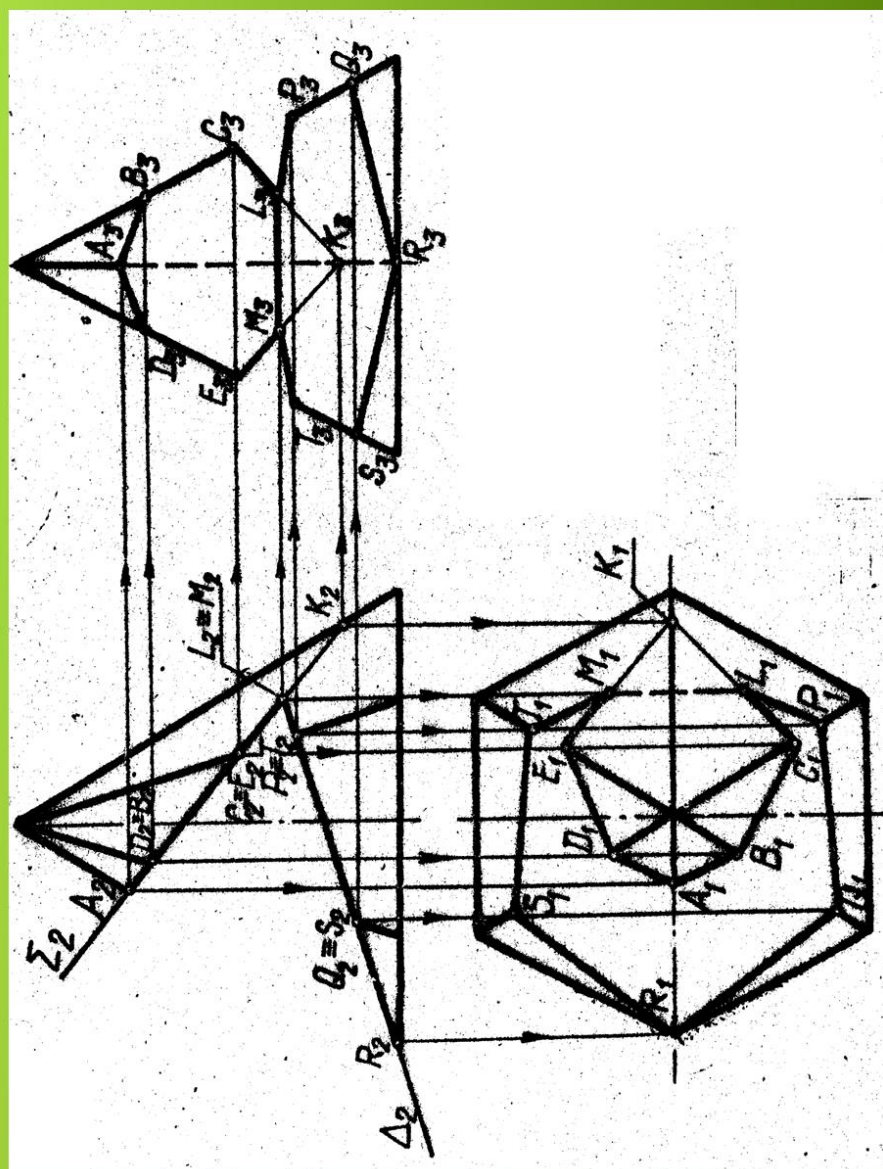
Переріз гранних поверхонь площиною

Площина перетинає поверхні багатогранника по багатокутнику, вершинами якого є точки перетину ребер багатогранника з площиною.



Активация Windows
чтобы активировать Windows, перейдите в раздел "Параметры".

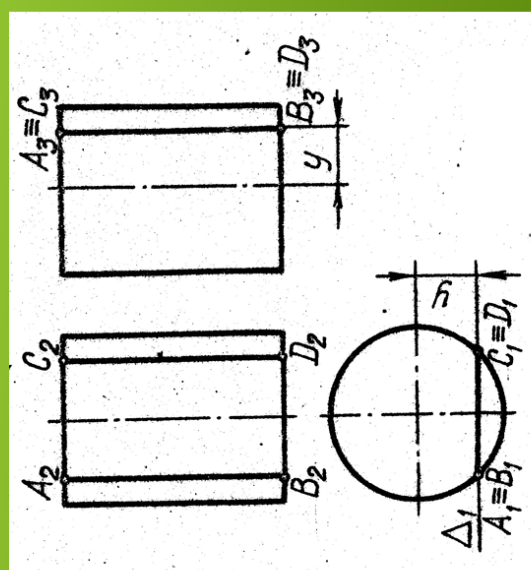
Алгоритм побудови перерізів гранних поверхонь площинами застосований для визначення лінії перетину піраміди гранним вирізом.



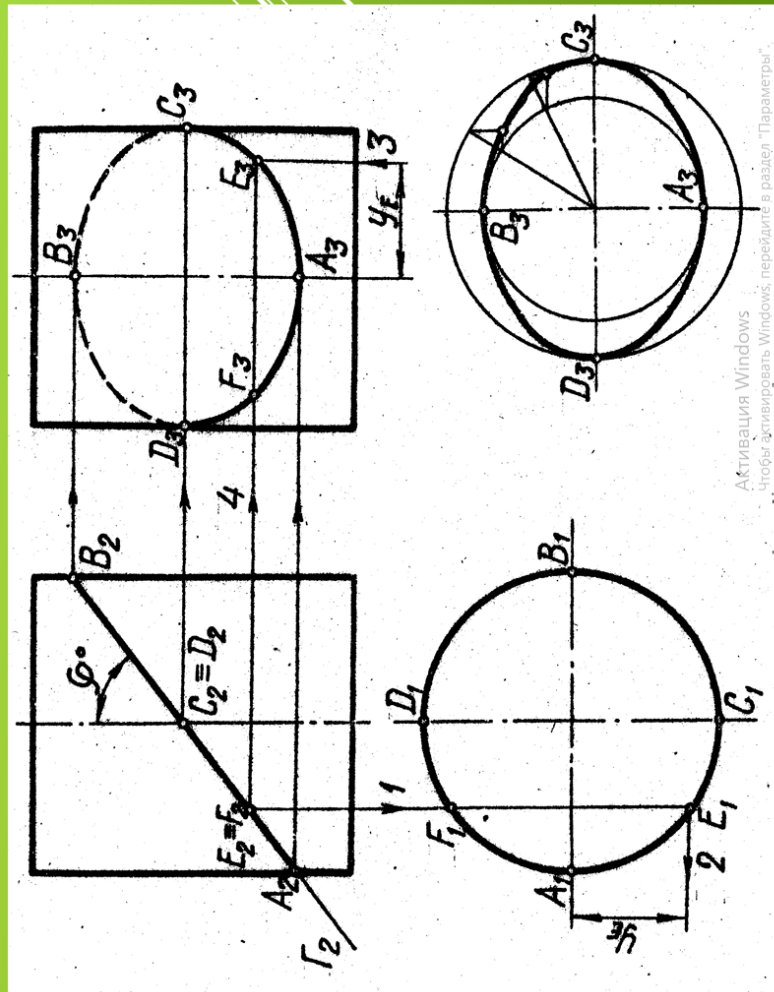
Активация Windows
чтобы активировать Windows, перейдите в раздел "Параметры".

Переріз циліндра площиною

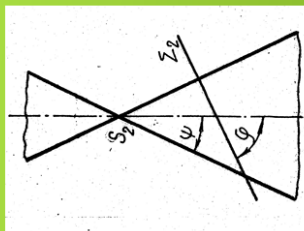
Побудова лінії перетину циліндра площиною, яка паралельна його осі.



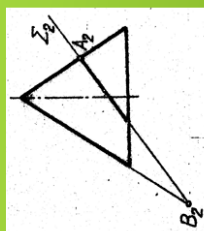
Побудова лінії перетину циліндра площиною, яка нахилена до його осі.



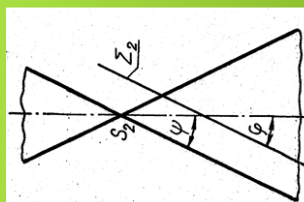
Активация Windows
Чтобы активировать Windows, перейдите в раздел "Параметры".



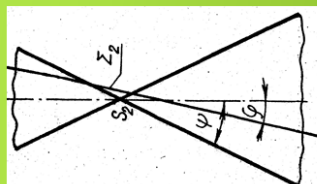
еліпс



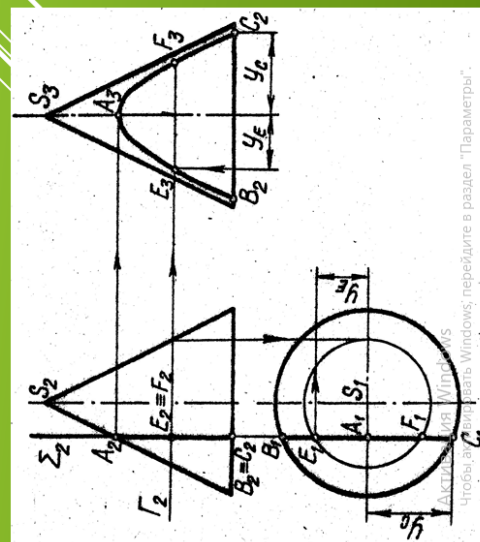
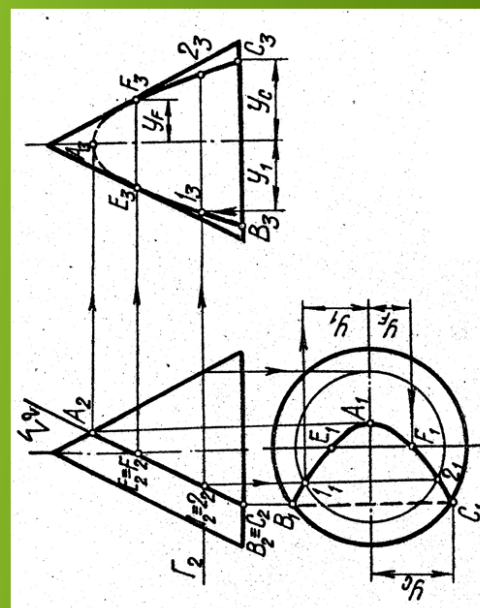
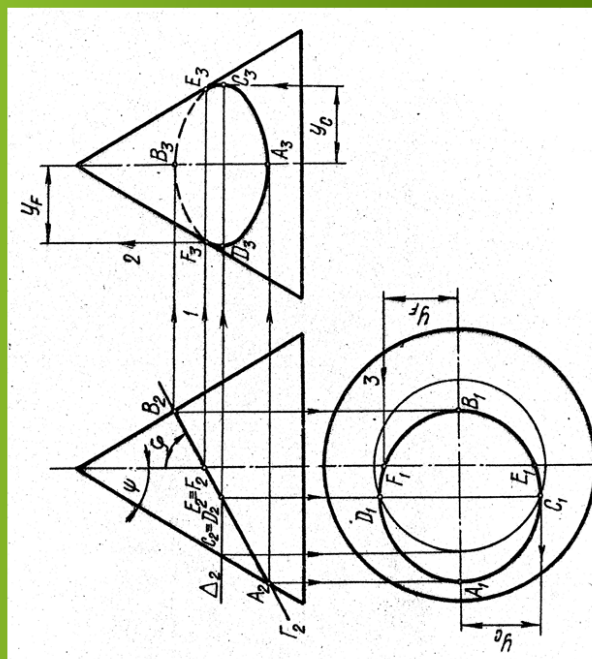
Переріз конуса площиною



парабола

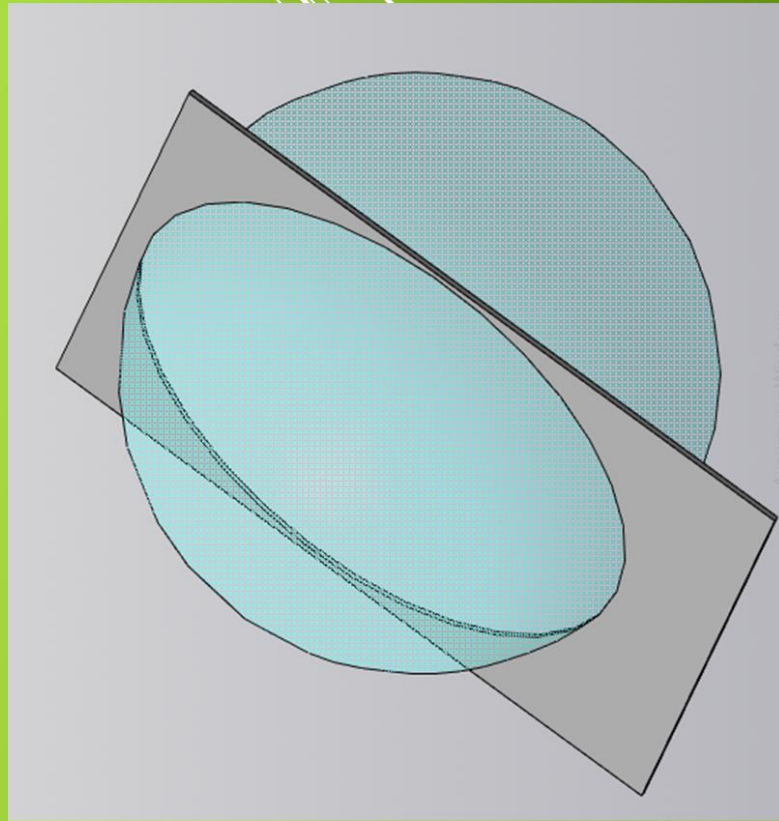
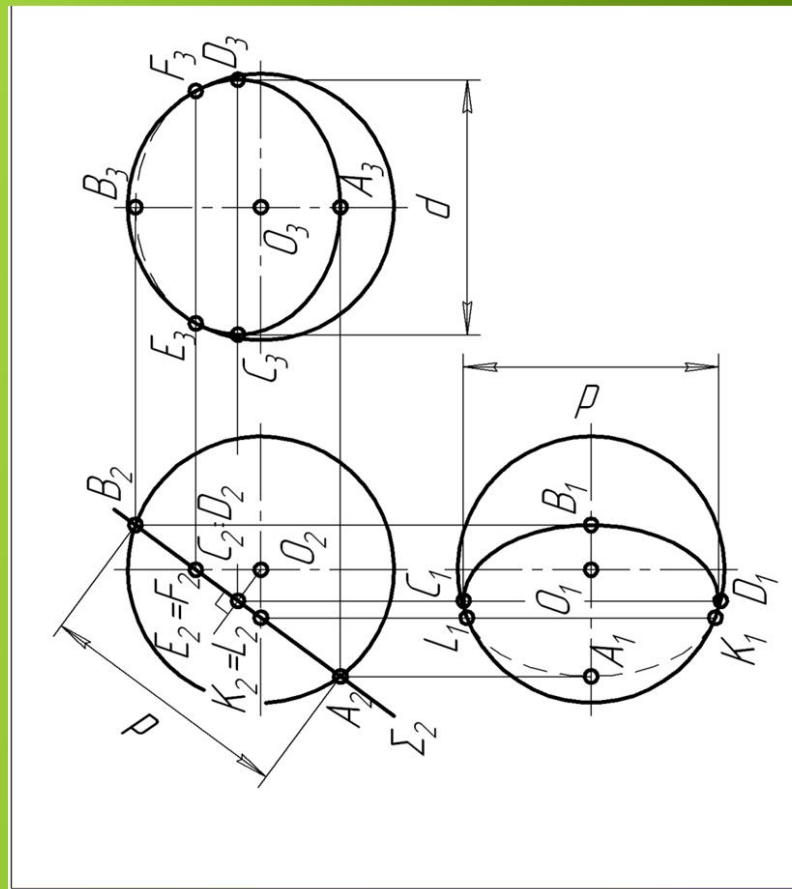


гіпербола

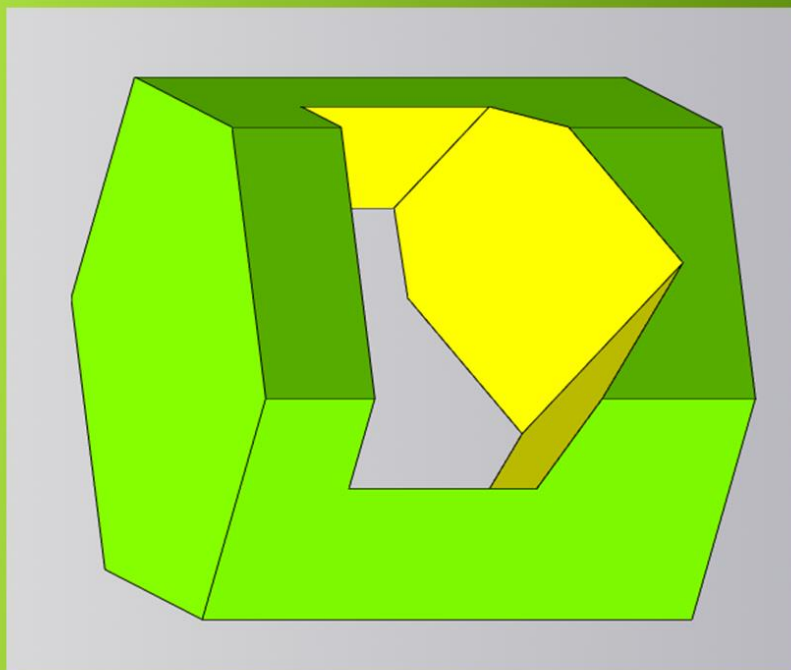
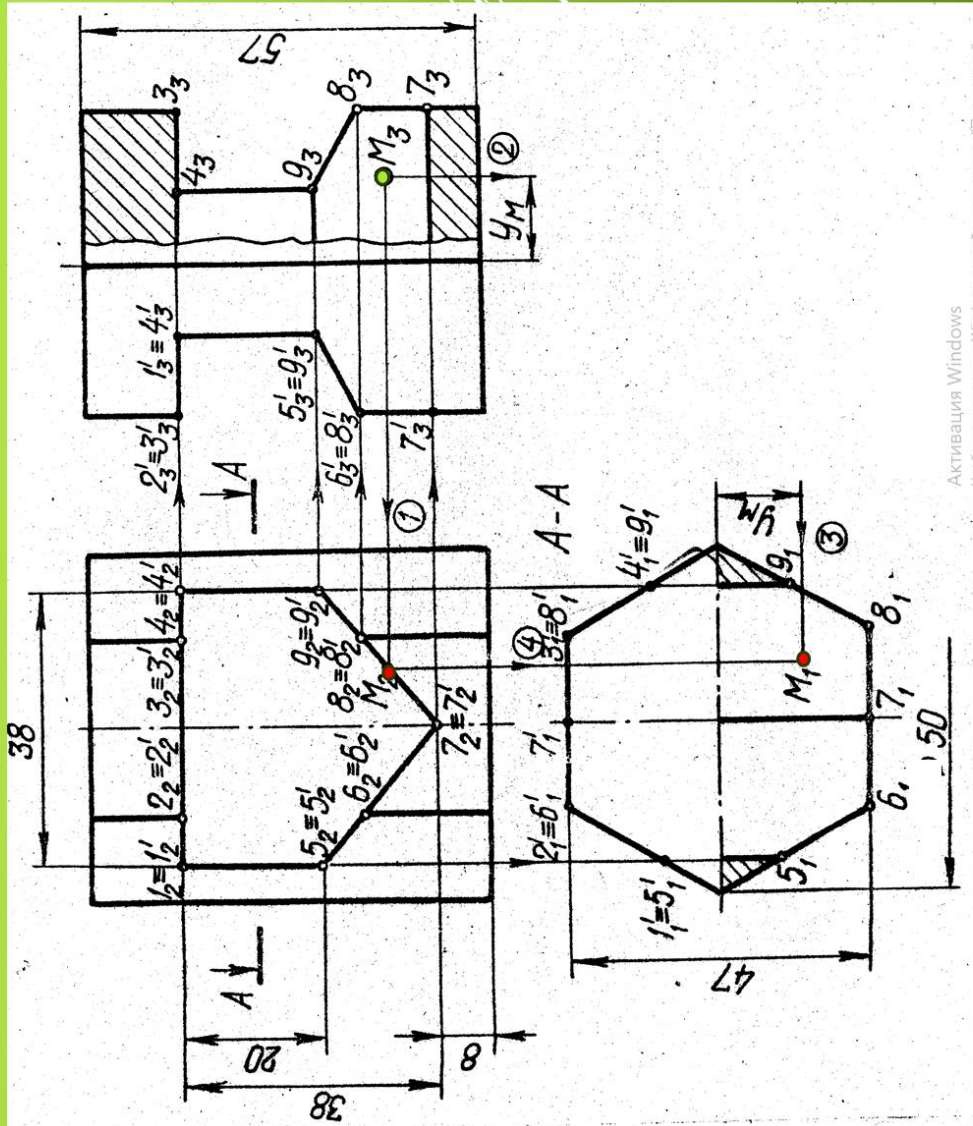


Переріз сфери площиною

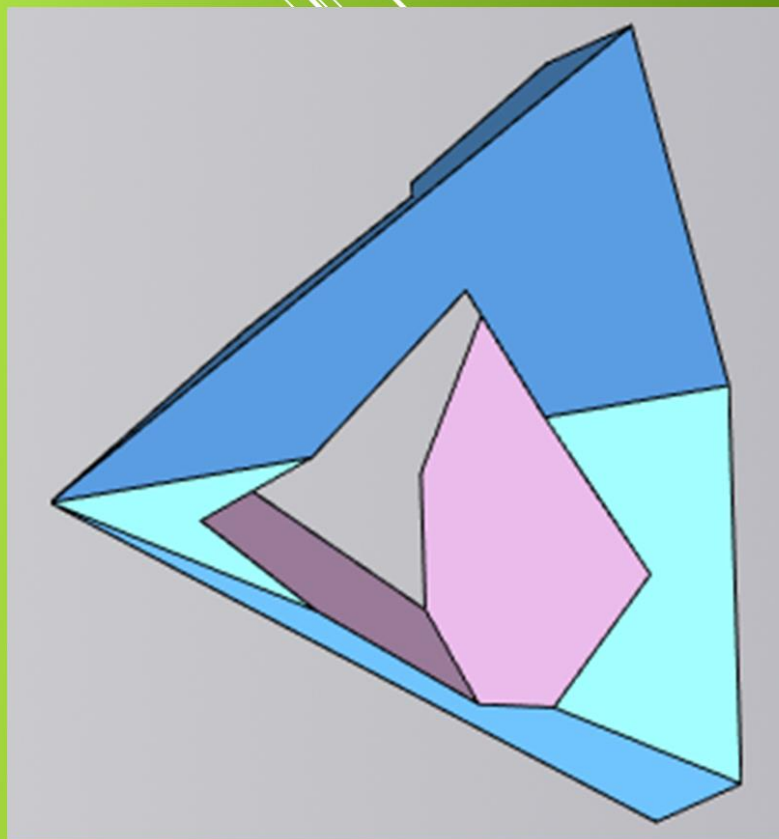
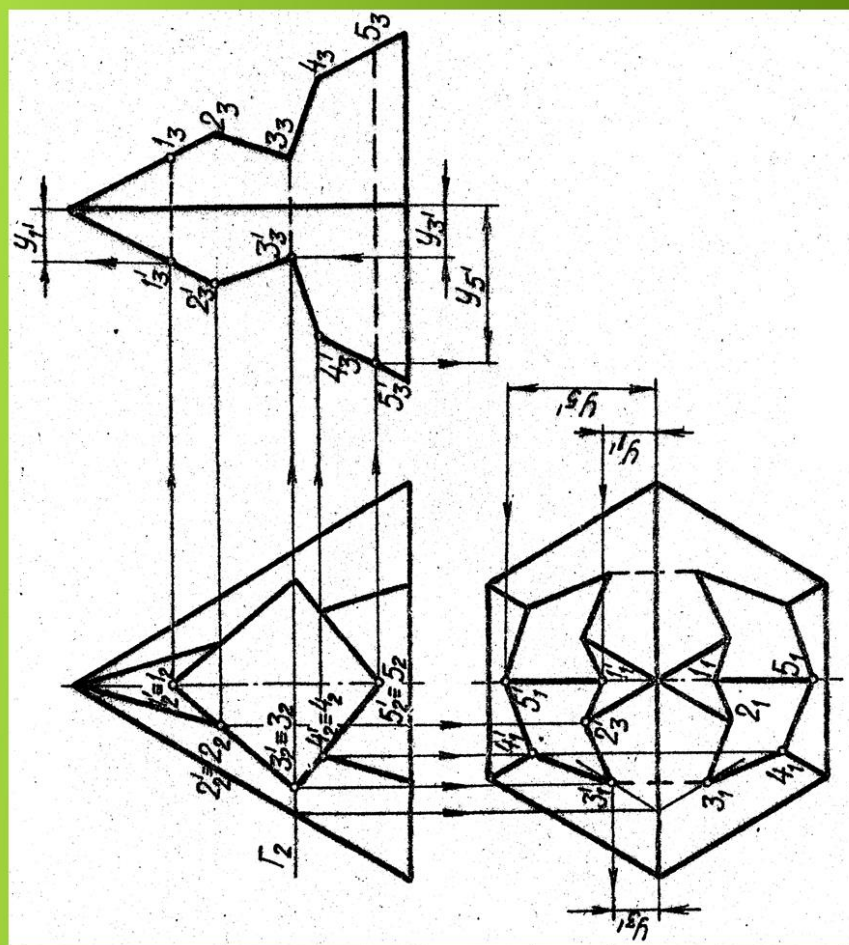
Площина перетинає сферу завжди по **колу**, яке може проєкціюватися у відрізок прямої або еліпс.



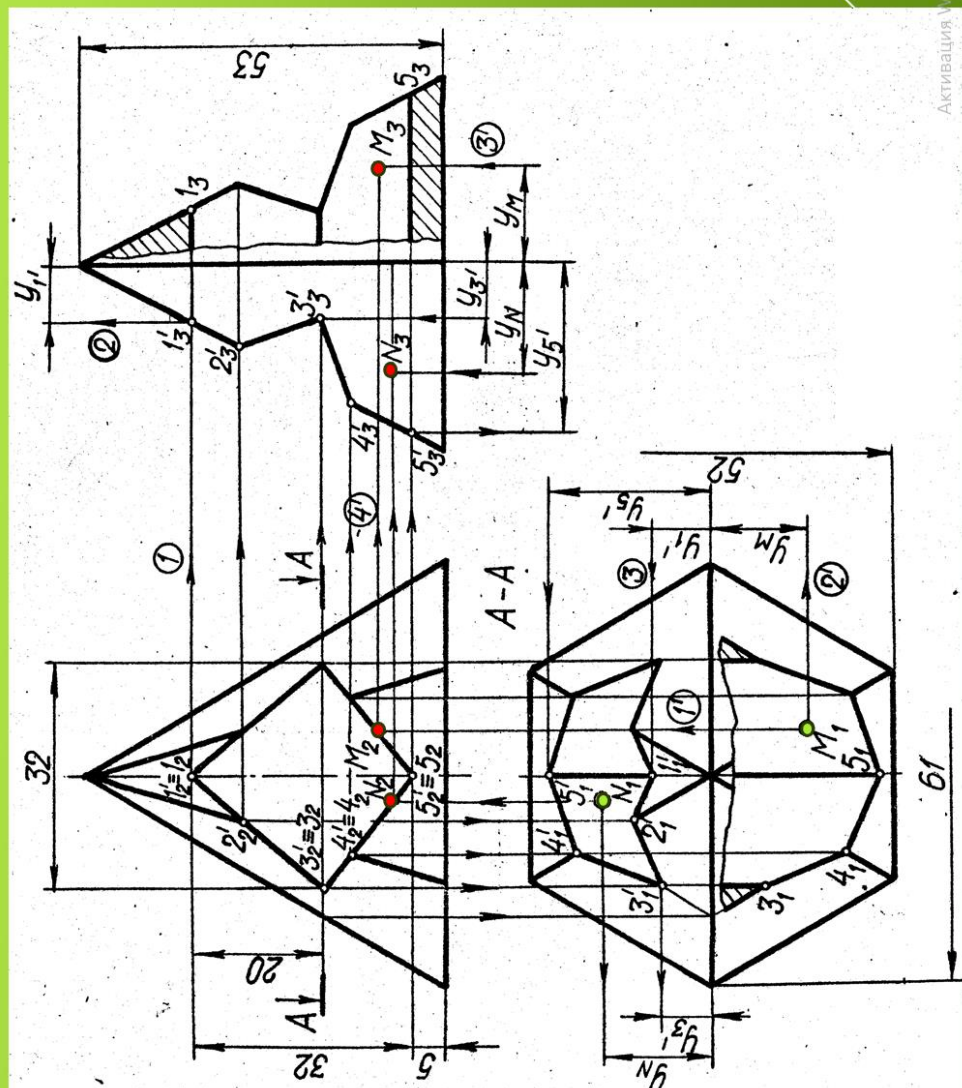
Щоб активувати Windows, перейдіть в розділ "Параметри".



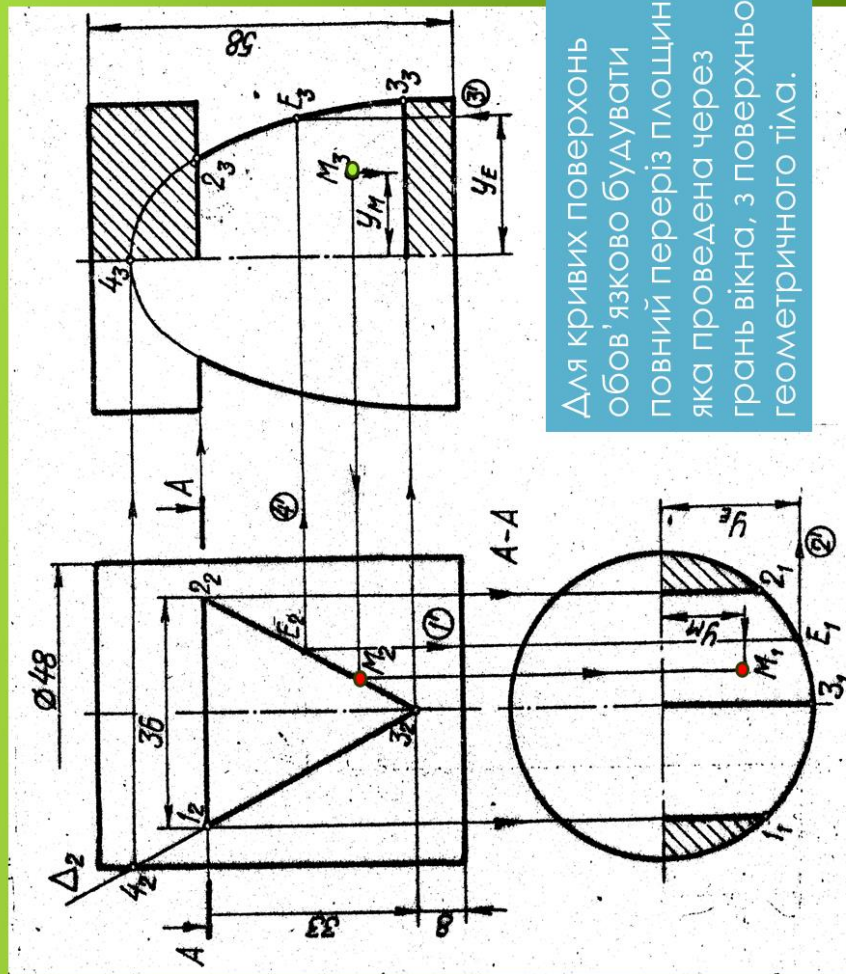
Піраміда



Активатор Windows
Чтобы активировать Windows, перейдите в раздел "Параметры".

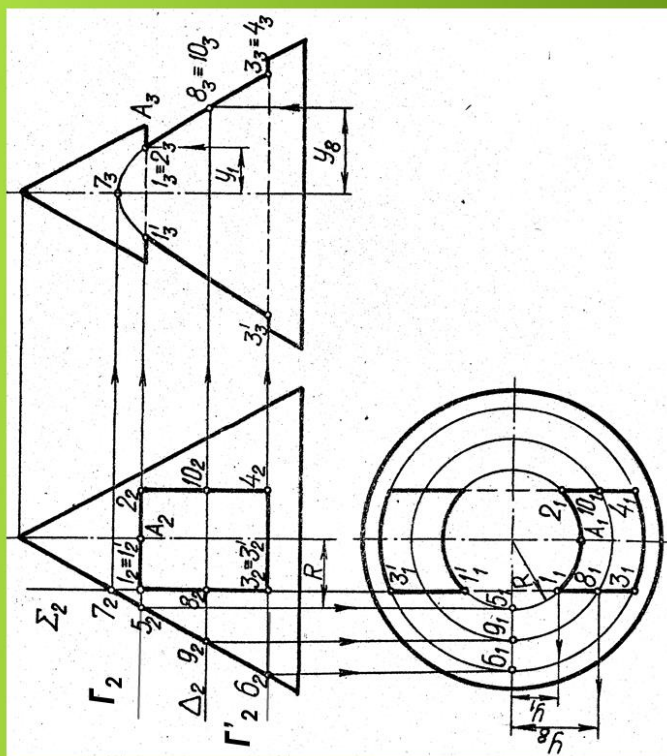


Циліндр

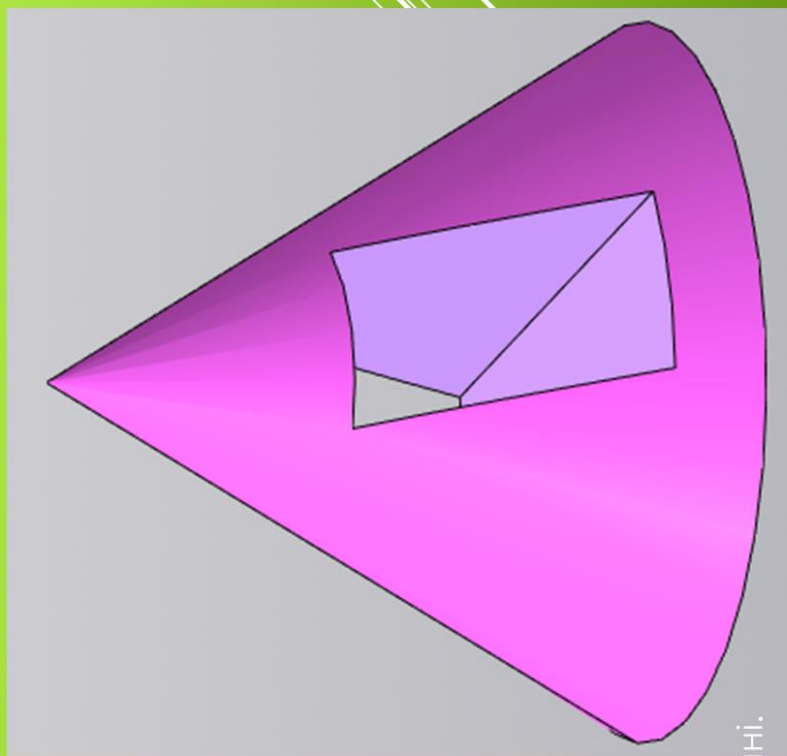


Для кривих поверхонь
обов'язково будувати
повний переріз площини,
яка проведена через
грань вікна, з поверхню
геометричного тіла.

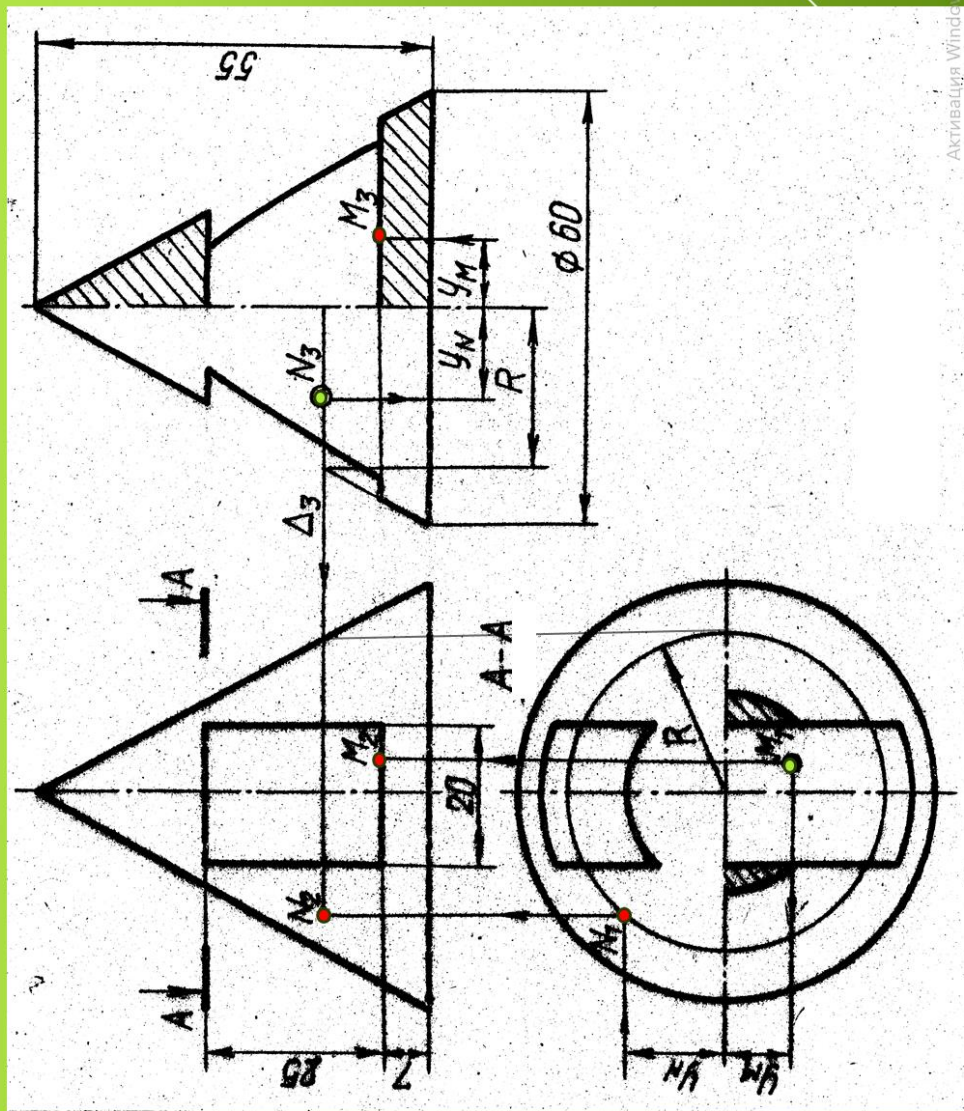
Конус



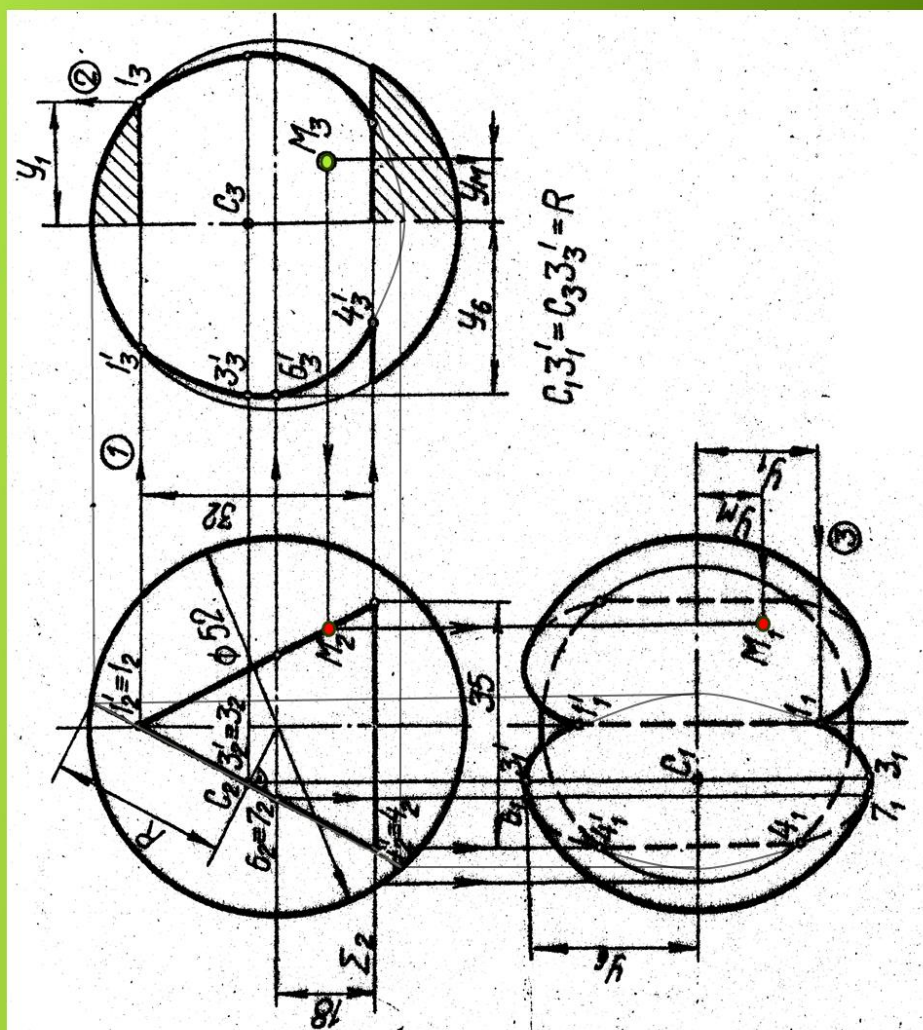
1. Проводимо площину Γ через верхню грань отвору. Будуємо коло перерізу, та виділяємо дугу, яка належить грані.
2. Проводимо площину Γ' через нижню грань отвору. Будуємо коло перерізу, та виділяємо дугу, яка належить грані.
3. Проводимо площину Σ через ліву грань отвору. Будуємо гіперболу перерізу, та виділяємо дугу, яка належить грані.



Активация Windows
чтобы активировать Windows, перейдите в раздел "Параметры".



Сфера



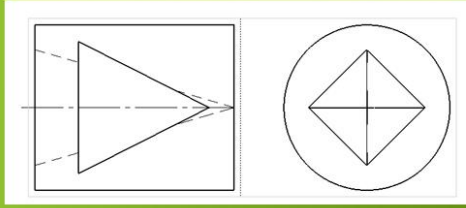
Активация Windows
чтобы активировать Windows, перейдите в раздел "Параметры".

Побудова ліній перетину поверхні заданого тіла з отвором наскрізним призматичним вікном (подвійне проникання)

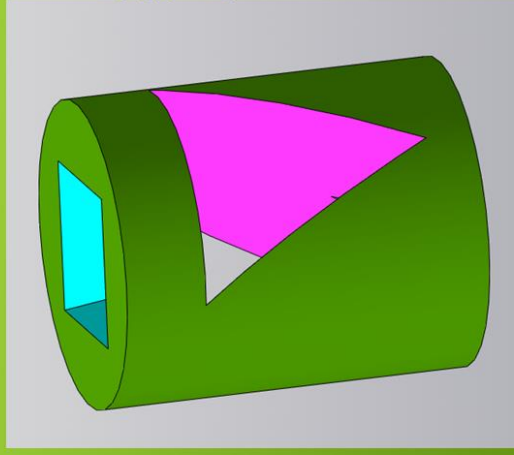
Алгоритм розв'язку задачі.

1. Розв'язок **зовнішньої задачі**: визначення лінії перетину призматичного отвору з зовнішньою поверхнею геометричного тіла.
2. Розв'язок **внутрішньої задачі**: визначення лінії перетину призматичного отвору з внутрішньою поверхнею геометричного тіла.
3. Побудова **ребер** призматичного отвору.
4. Виконання розрізів.
5. Нанесення розмірів.

Графічна умова задачі



Просторова модель



Активация Windows
чтобы активировать Windows, перейдите в раздел "Параметры".

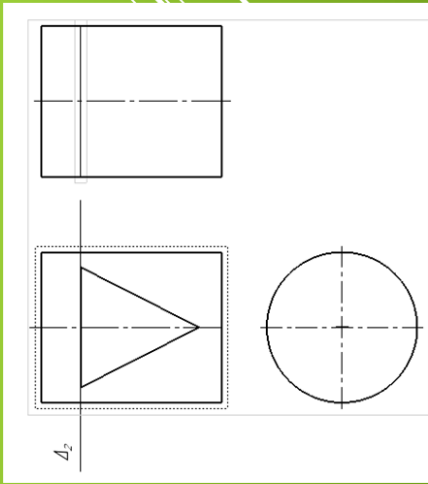
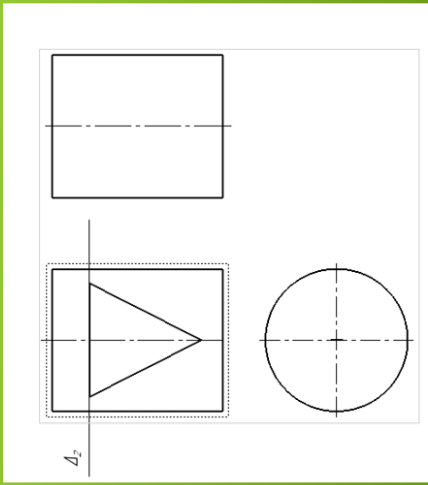
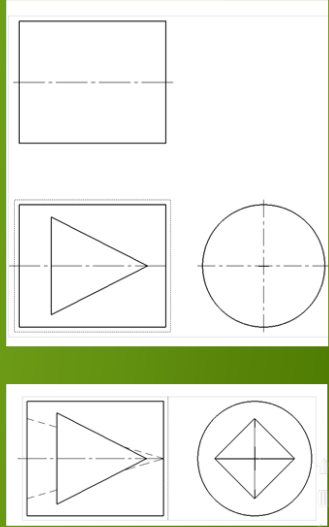
Розв'язок «зовнішньої задачі»: визначення лінії перетину призматичного отвору з зовнішньою поверхнюю геометричного тіла.

3. Побудуємо повний переріз поверхні площиною;

2. Через кожну грань призматичного отвору по черзі проведемо допоміжну площину.

1. Проаналізуємо зовнішню поверхню, яка обмежує геометричне тіло, та побудуємо його третю проекцію без врахування ліній перетину.

Горизонтальна проекція обмежена колом, це означає, що зовнішня поверхня – поверхня обертання. На фронтальній проекції обрис поверхні - прямокутник, це означає, що задана поверхня прямого кругового циліндра. Будемо його профільну проекцію.

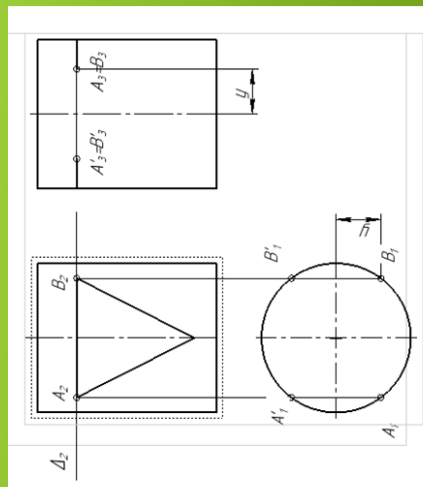


Першою проводимо найпростішу площину.

Лінії внутрішньої поверхні поки що не показуємо.

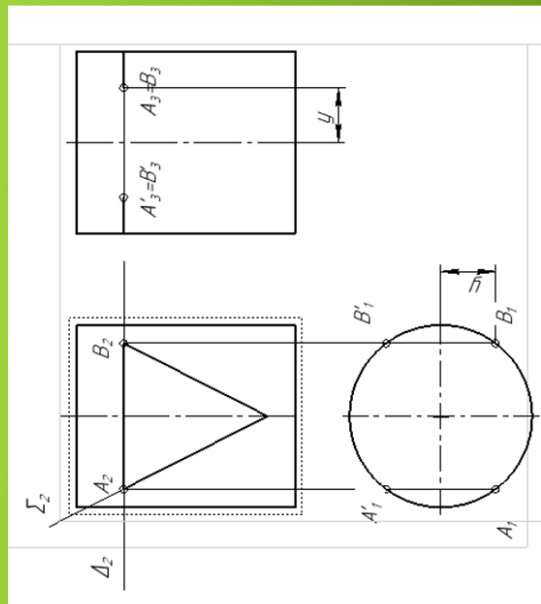
Допоміжна площина перетинає циліндр по колу, горизонтальна проекція якого збігається з проекцією циліндра, а профільна — відрізок.

4. Виділяємо частині лінії перетину, які належать грані отвору.

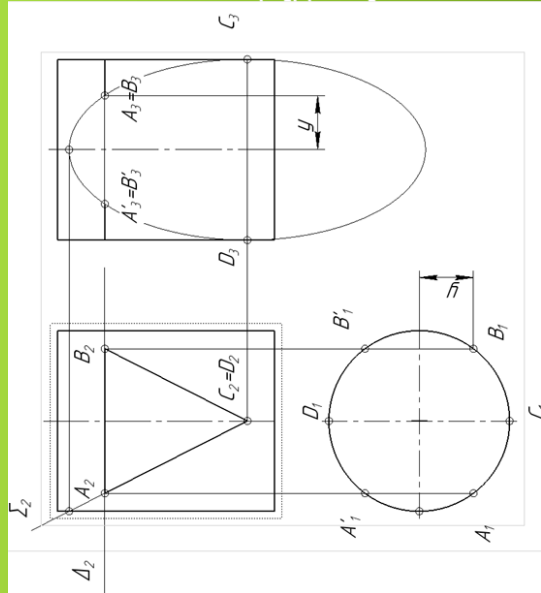


Це дві дуги **AB** и **A'B'**.

5. Через наступну грань отвору проводимо допоміжну площину та повторюємо для неї наведені вище дії.

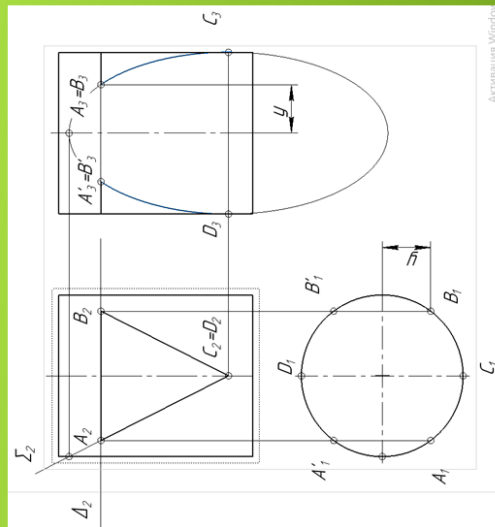


Проводимо допоміжну площину через бічну грань отвору

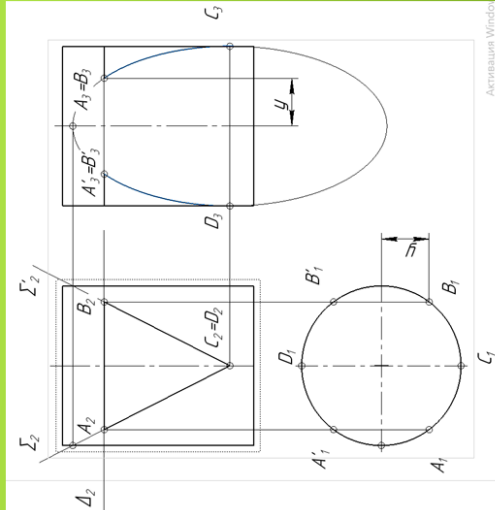


Вона перетинає циліндр по еліпсу.

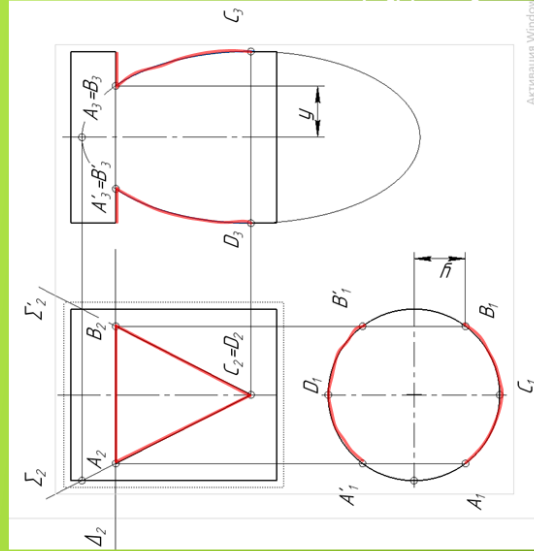
Активация Windows
чтобы активировать Windows, перейдите в раздел "Параметры".



Грані належать дуги AC та A'D.



Площина, яка проведена через праву грань отвору, перетинає циліндр по такому ж еліпсу. Його горизонтальна проекція збігається зі слідом-проекцією циліндра, а профільна - з раніше побудованою проекцією еліпса.



Передня та задня обрисні твірні циліндра вирізані отвором від верхньої грані отвору до точок **C** та **D**.

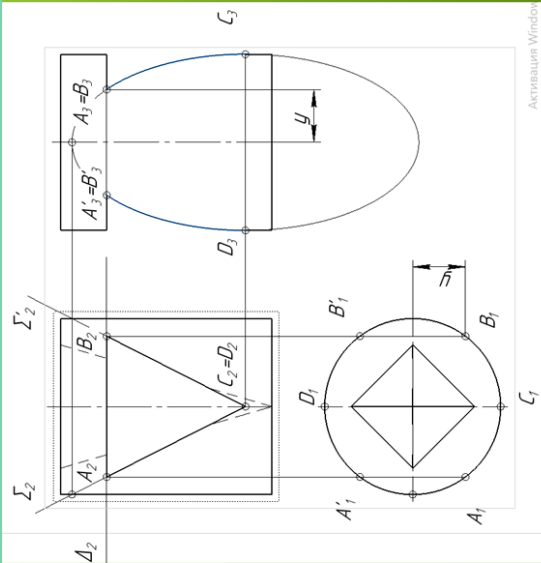
6. Виділяємо частини обрису, які вирізані отвором.

7. Побудуємо ребра призматичного отвору;
8. Виконуємо розрізи.

Активация Windows
Щоб активувати Windows, перейдіть на сайт "Активация Windows".

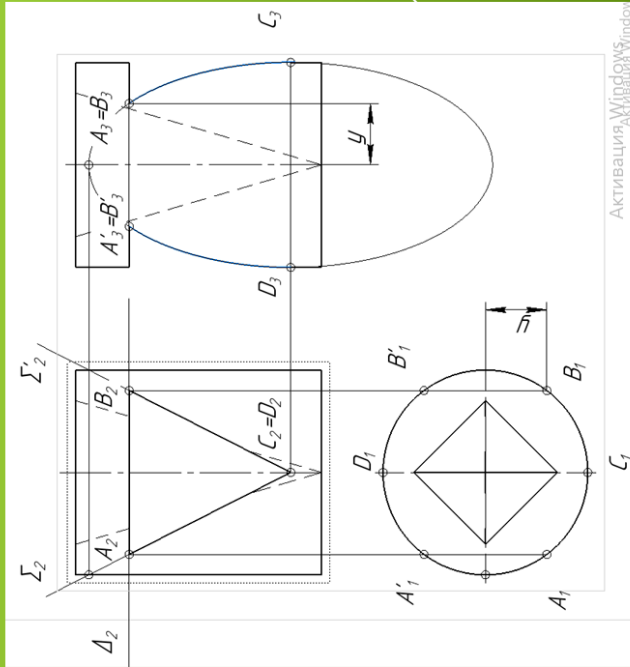
Розв'язок «внутрішньої задачі»: визначення лінії перетину призматичного отвору з внутрішньою поверхнюю геометричного тіла.

1. Аналіз внутрішньої поверхні, яка обмежує геометричне тіло, та побудова його третьої проекції без врахування ліній перетину.



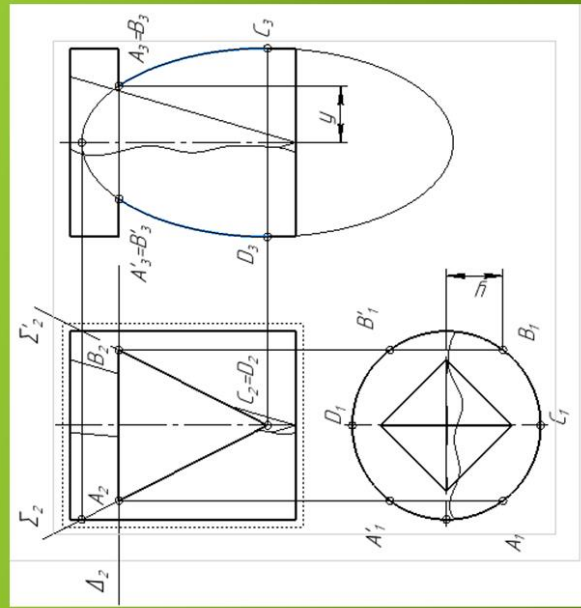
Проведемо невидимі лінії внутрішньої форми.

Оскільки горизонтальна проекція отвору - квадрат, а фронтальна – трикутник, внутрішній отвір має форму правильної чотирикутної піраміди. Побудуємо її профільну проекцію.



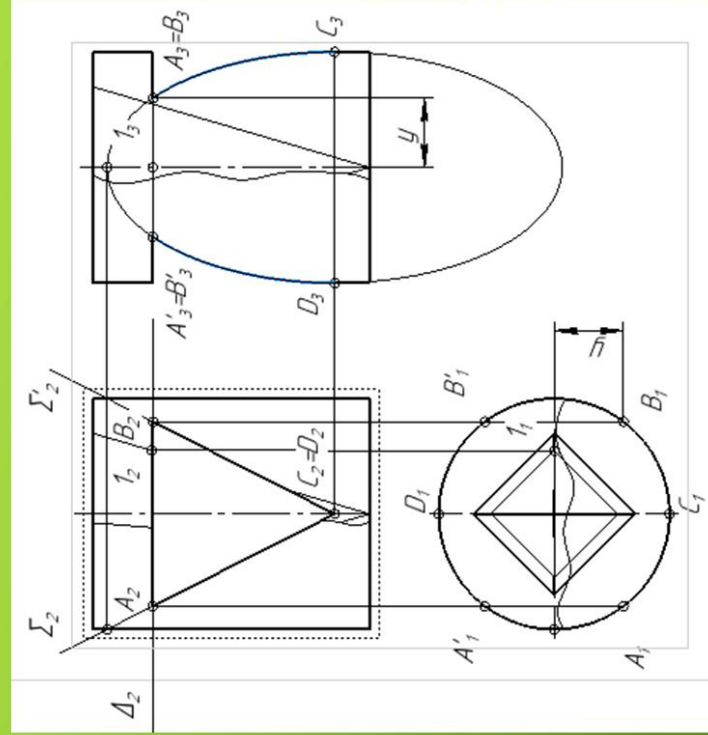
Активация Windows
Чтобы активировать Windows, перейдите в раздел "Параметры".

Визначимо розташування розрізів на кожній проекції геометричного тіла. Оскільки на вісь симетрії проєкціюються ребра піраміди, обмежимо зону розрізу хвилястою лінією.

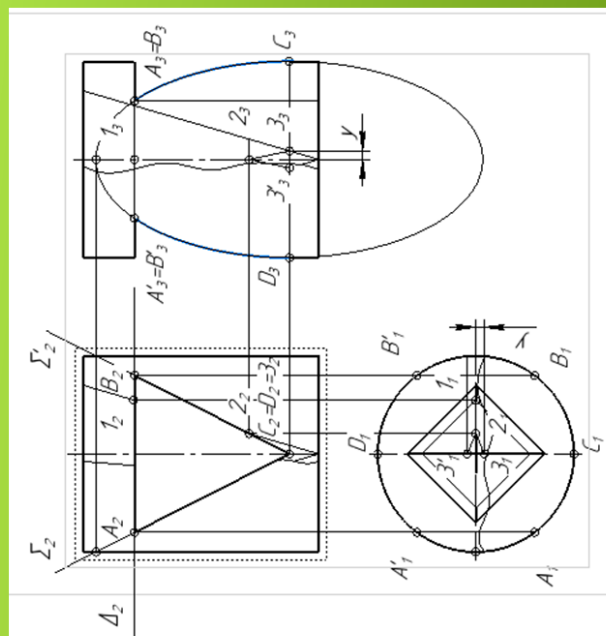


Ребра з боку розрізу наведемо суцільною тонкою лінією, а з боку виду видалимо зовсім.

2. Через кожну грань призматичного отвору проведемо ті ж самі допоміжні площини.

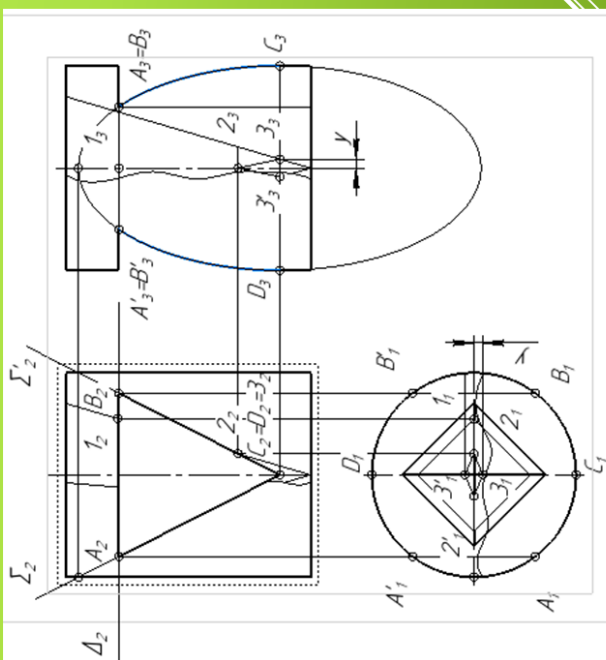


Площина Δ перетинає піраміду по квадрату.

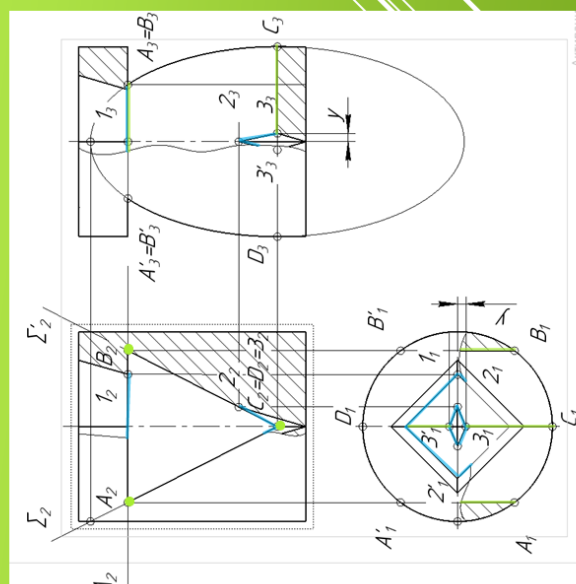
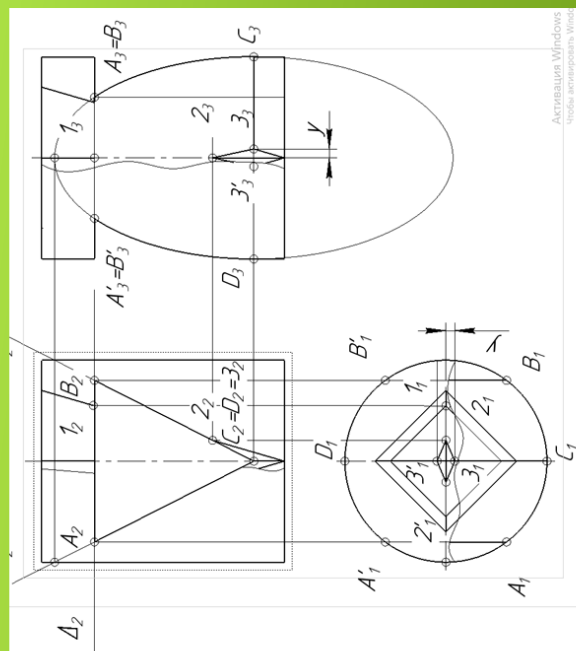
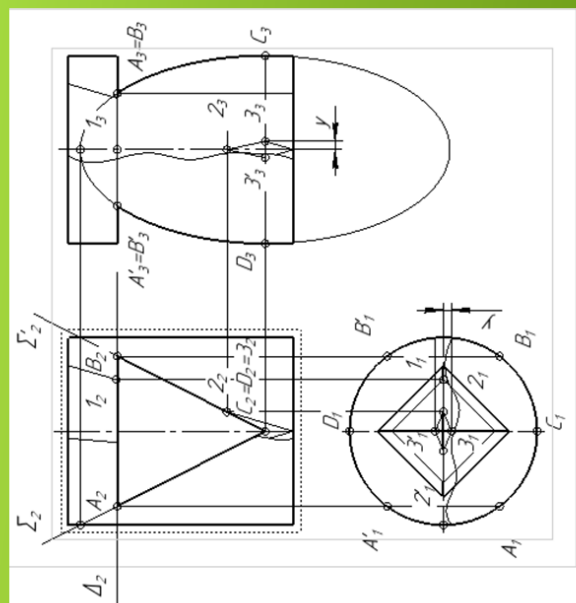


Побудовано переріз піраміди площиною Σ' .

Оскільки переріз є багатокутником, достатньо побудувати тільки дійсні вершини перерізу поверхні гранню. Це точки 2, 3 та 3'.



Площина перетинає піраміду по симетричному багатокутнику.



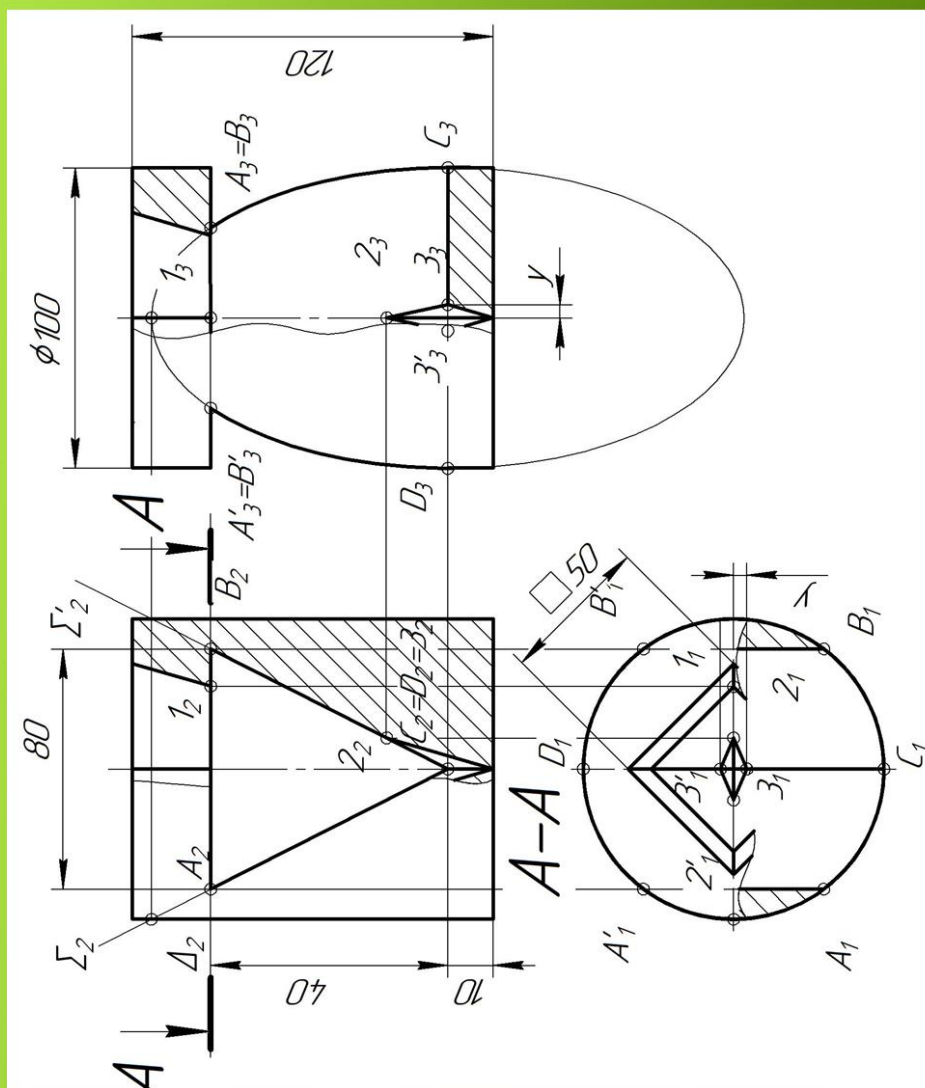
Видаляємо частини бічних ребер піраміди, що вирізані призматичним отвором.

Наводимо існуючі частини бічних ребер та будуємо ребра призматичного отвору. Верхні ребра А-А' та В-В' складаються з одного відрізка, а нижнє ребро розпадається на два: С-3 та С'-3'.

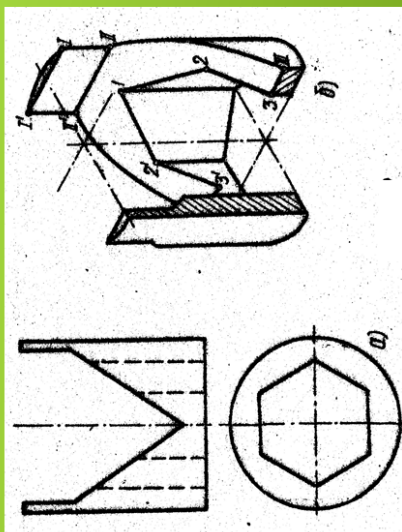
Штрихуємо перерізи та коригуємо лінію обриву.

Активация Windows
Чтобы активировать Windows, перейдите в раздел "Параметры".

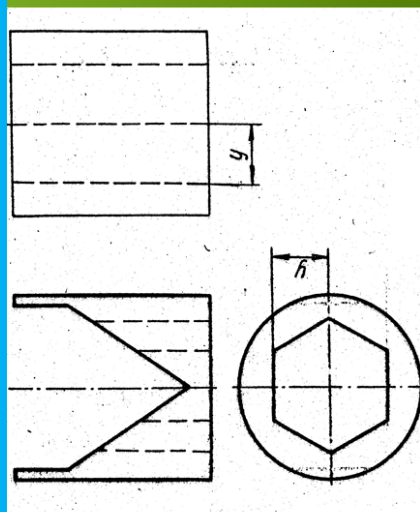
Позначаємо розрізи та наносимо розміри.



Приклад 1.

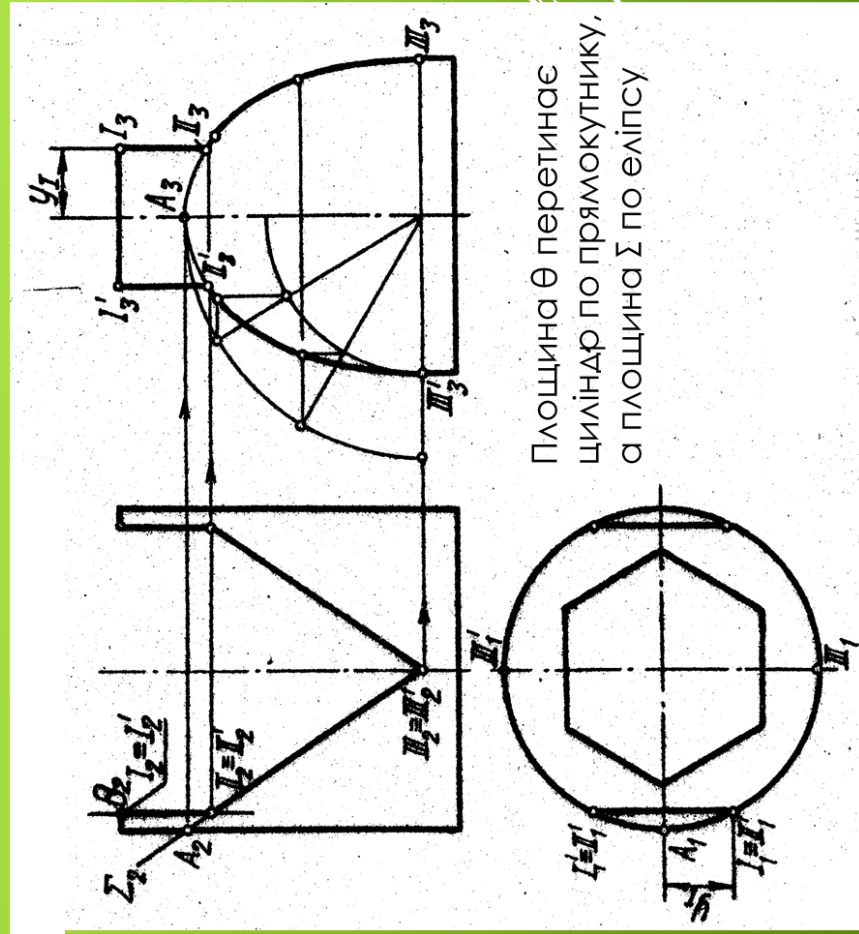


Побудова третьої проекції



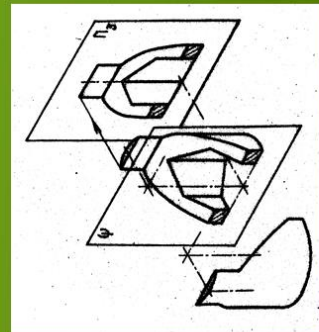
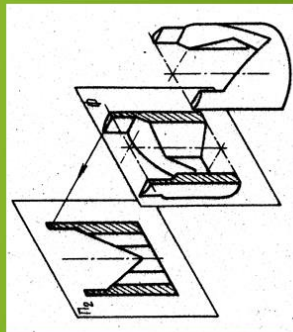
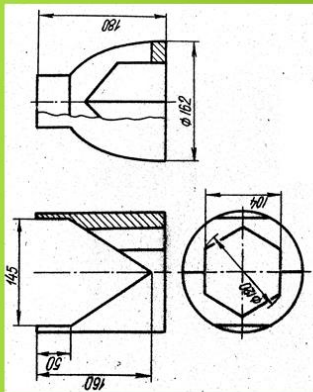
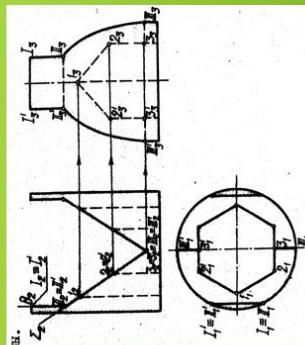
Приклади розв'язку типових задач

Розв'язок «зовнішньої» задачі

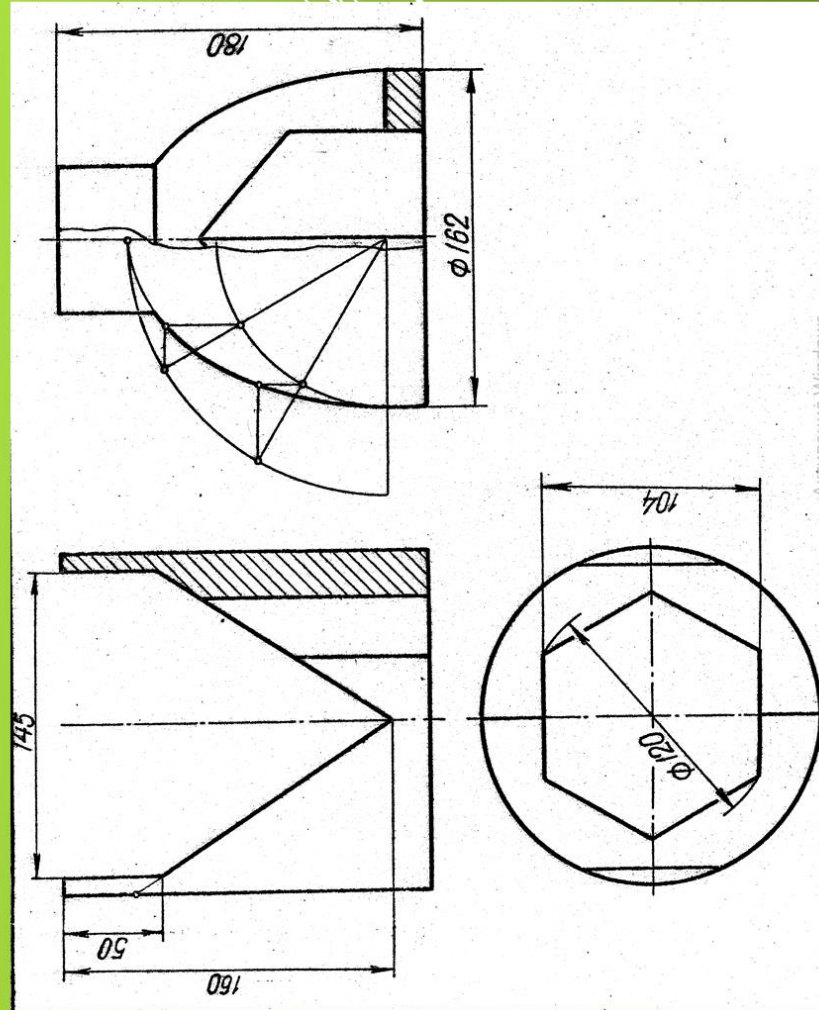


Активация Windows
Чтобы активировать Windows, перейдите в раздел "Параметры".

Розв'язок «внутрішньої» задачі

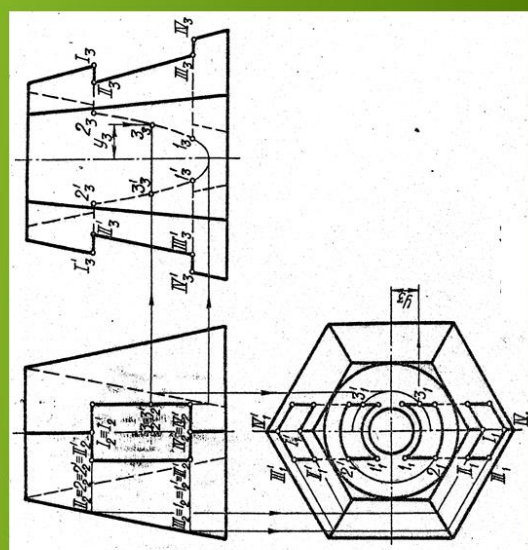
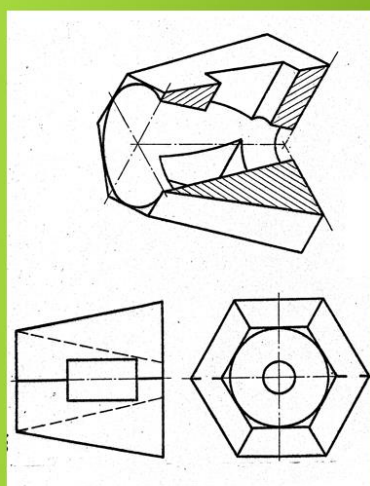
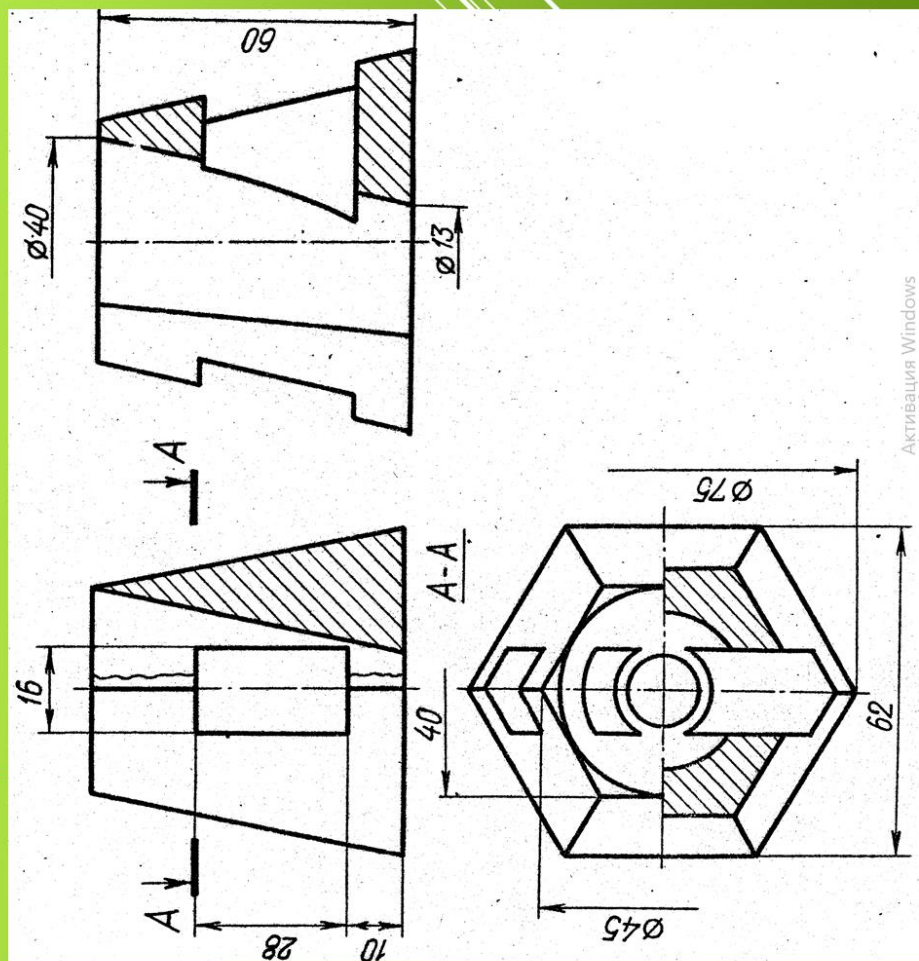


Оформлення розв'язку задачі

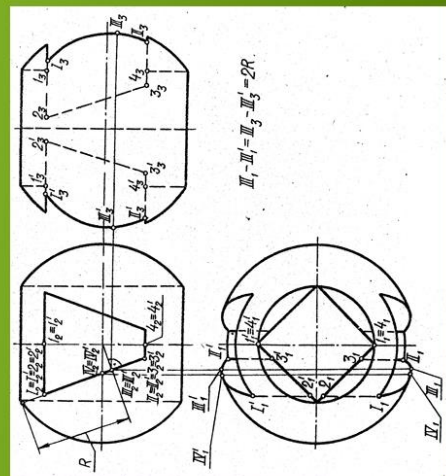
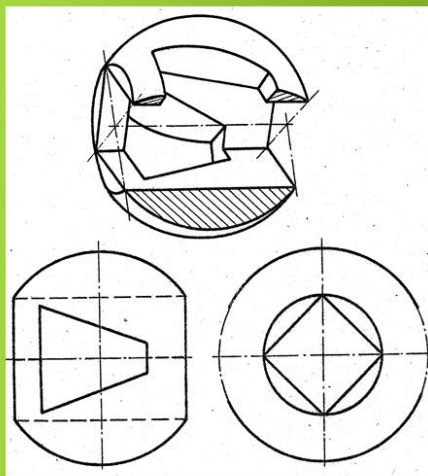


Активізуйте Windows.
Щоб активувати Windows, перейдіть в розділ «Параметри».

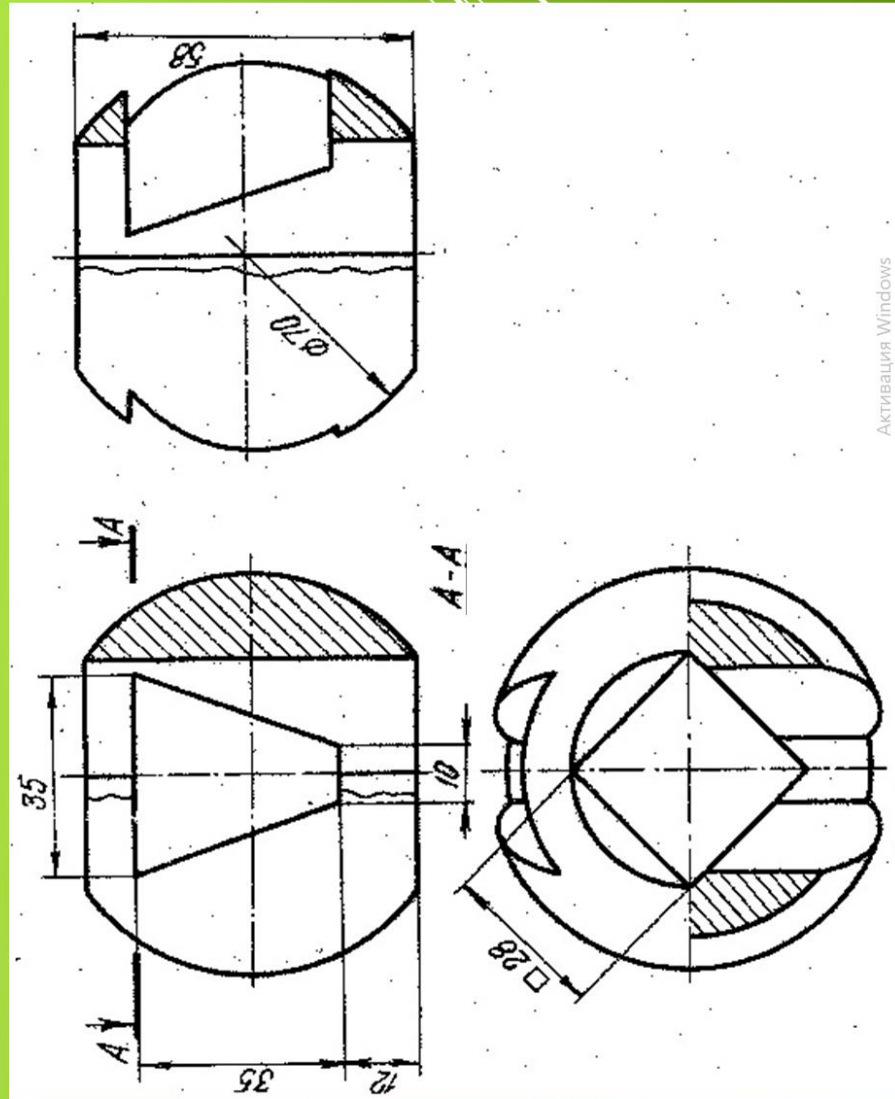
Оформлення розв'язку задачі



Приклад 3.



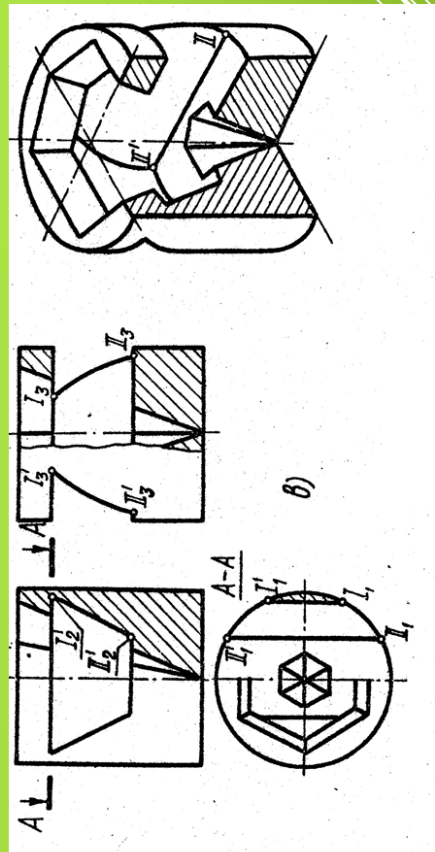
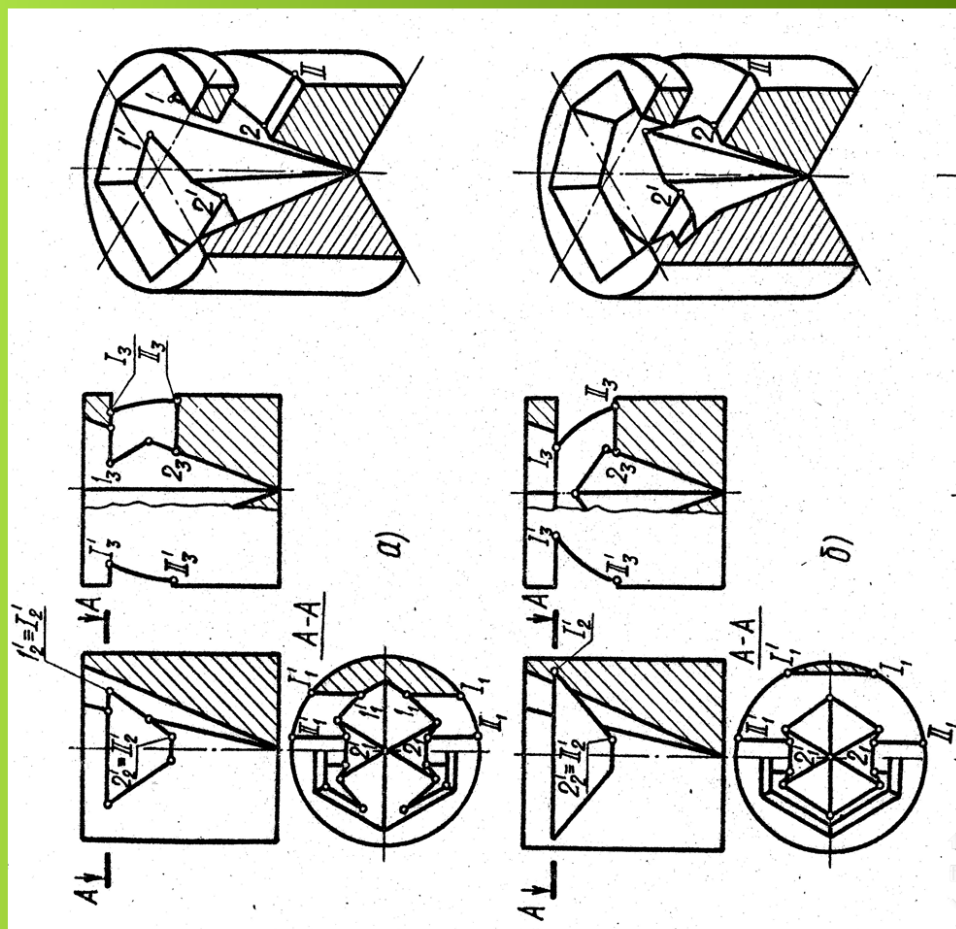
Оформлення розв'язку задачі



Активация Windows

После активации Windows, перейдите в раздел "Параметры"

Залежність лінії перетину внутрішніх поверхонь від співвідношення їх розмірів



ВИСНОВКИ

1. Для побудови ліній перетину призматичного вікна з зовнішньою та внутрішньою поверхнями необхідно вміти будувати точки на поверхнях та перерізи їх площинами.
2. При розв'язку задач на одинарне та подвійне проникання спочатку треба проаналізувати задані поверхні та побудувати їх третю проекцію без врахування ліній перетину.
3. Через кожну грань призматичного вікна слід провести допоміжну площину та побудувати її лінію перетину з заданою.
4. Для кривих поверхонь необхідно будувати повний переріз.
5. На повному перерізі виділити частини, які належать грані.
6. Видалити частини твірних, які вирізані вікном.
7. Побудувати ребра призматичного вікна.
8. Для задач на подвійне проникання треба спочатку розв'язати **зовнішню** задачу, а потім перейти до **внутрішньої**.

Питання та завдання для самоперевірки

1. Наведіть алгоритм розв'язання задачі на перетин поверхні з призматичним отвором.
2. Який метод доцільно застосовувати для визначення лінії перетину поверхні обертання з призматичним отвором?
3. Як визначається видимість лінії перетину поверхні з отвором?
4. Наведіть приклад алгоритму розв'язання задачі на подвійне проникання.

Лекція 8. Взаємний перетин поверхонь

На лекції надаються алгоритми визначення лінії перетину двох поверхонь.

Розглядається залежність вигляду лінії перетину від форм та взаємного розташування поверхонь. Наведений комплексний рисунок побудови за допомогою посередників – площин окремого положення. Наданий приклад побудови лінії перетину сфери та циліндра.

Розглядається комплексний рисунок побудови за допомогою концентричних сфер-посередників, надані умови використання способу. Наведений приклад побудови лінії перетину двох циліндрів.

Наданий приклад побудови лінії перетину двох поверхонь за допомогою ексцентричних сфер-посередників.

Розглядаються особливі випадки перетину поверхонь другого порядку: теорема Монжа та її наслідки, теорема про подвійний дотик, поверхні обертання із спільною віссю. Наведені приклади побудови лінії перетину.

ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА

Лекція 8.

Перетин поверхонь

Активация Windows
чтобы активировать Windows, перейдите в раздел "Параметры".

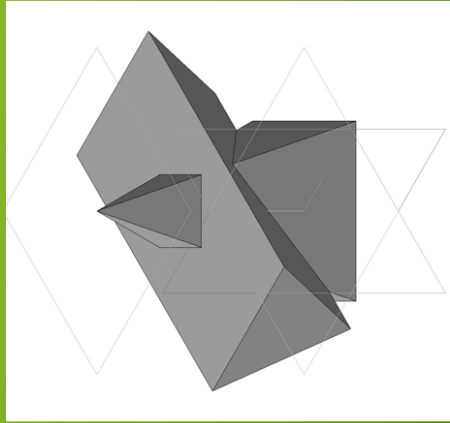
Основні питання

1. Форма лінії перетину в залежності від типів поверхонь.
2. Форма лінії перетину в залежності від взаємного розташування поверхонь.
3. Порядок побудови лінії перетину.
4. Перетин гранних тіл.
5. Метод посередників.
6. Посередники – площини окремого положення.
7. Сферичні посередники.
8. Ексцентричні сфери-посередники.
9. Посередники – площини загального положення.
10. Окремі випадки перетину.
11. Висновки.

Форма лінії перетину в залежності від типів поверхонь.

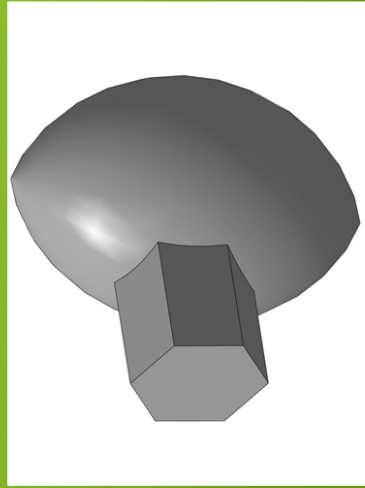
Лінією перетину поверхонь називається лінія, точки якої належать обом поверхням водночас. Її форма залежить від форми та взаємного положення поверхонь. Дві поверхні перетинаються по кривій або ламаній лінії, проекції яких визначаються за окремими точками. Точки лінії перетину будуються за умовою їх належності обом поверхням одночасно. Але перш ніж будувати точки лінії перетину слід визначити форму лінії перетину поверхонь.

Обидві гранні поверхні



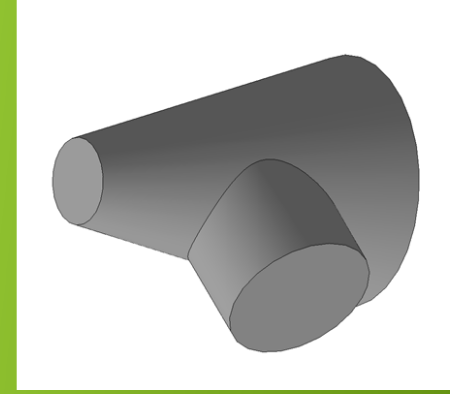
Лінія перетину – просторова ламана

Одна поверхня – гранна, інша – крива

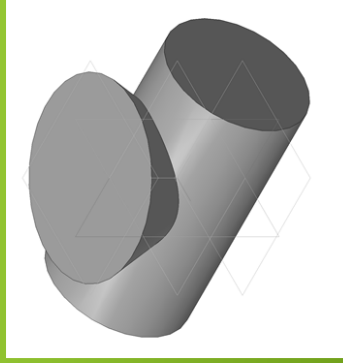


Лінія перетину – просторова крива, ланки якої — дуги плоских кривих.

Обидві криві поверхні



Лінія перетину – просторова крива

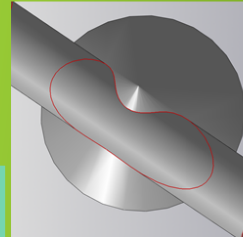
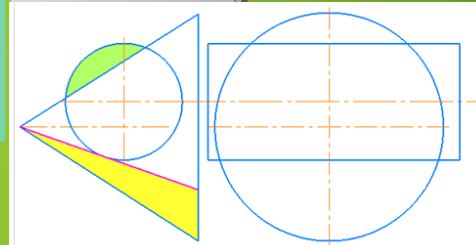
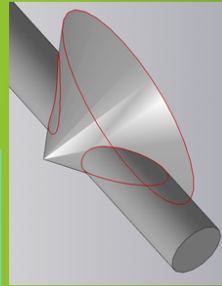
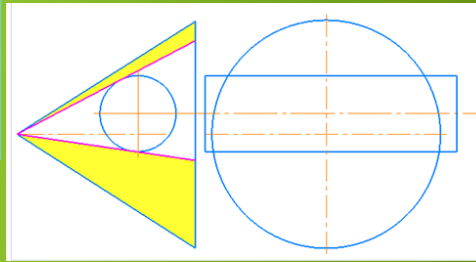


Щоб активувати Windows, перейдіть в розділ "Параметри".

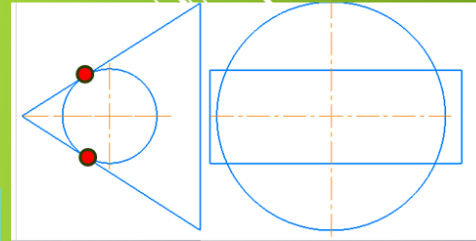
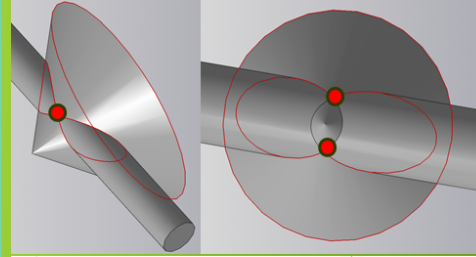
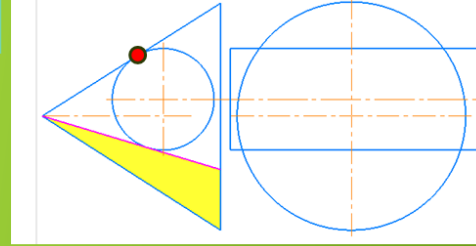
Форма лінії перетину в залежності від взаємного розташування поверхонь.

Можливі варіанти ліній перетину розглянемо на прикладі перетину циліндра з конусом.

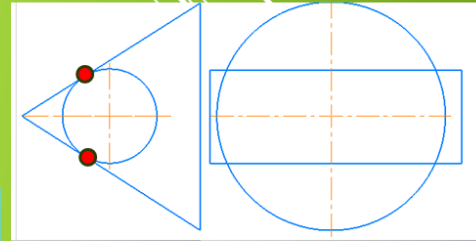
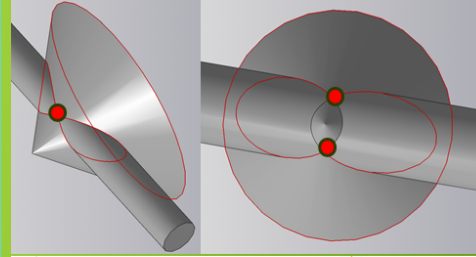
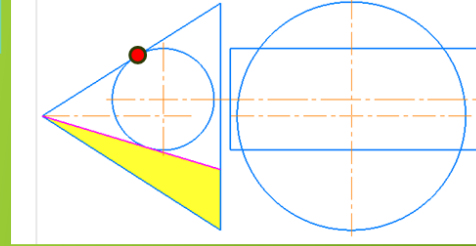
1. Проникання



2. Врубка



3. Окремі випадки



На одній з поверхонь (конус) дві зони неперетинання. Лінія перетину складається з двох кривих.

На кожній з поверхонь по одній зоні неперетинання. Лінія перетину складається з одної кривої.

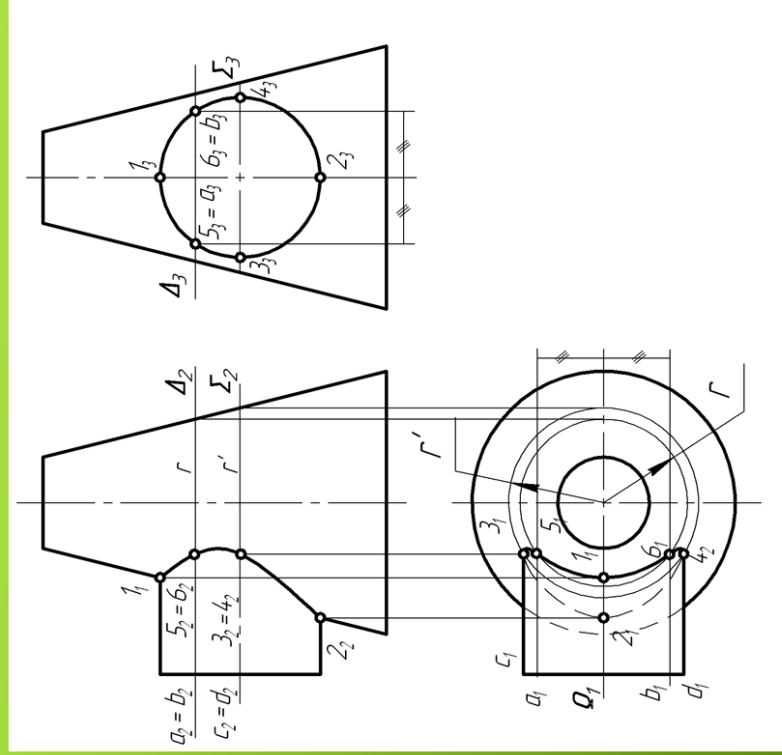
Поверхні мають одну або дві точки дотику. Зона неперетинання одна – лінія перетину має одну точку самоперетину. Зон неперетинання немає – лінія перетину має дві точки самоперетину.

Порядок побудови лінії перетину

1. Визначають опорні або характерні точки лінії перетину поверхонь:

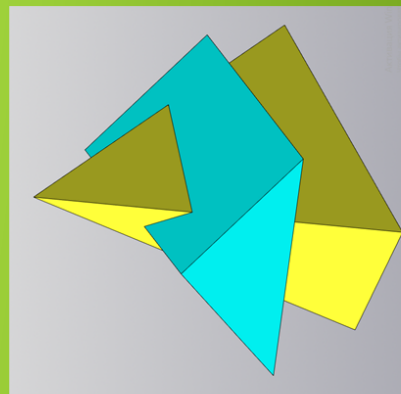
- точки, які належать обриснім лініям обох поверхонь на всіх площинах проекцій, де проводиться побудова;
- екстремальні точки (точки з максимальними та мінімальними координатами);
- для ламаних з криволінійними та прямолінійними ланками - вершини ламаних.

2. Визначають проміжні точки в тих ділянках лінії перетину, де характерних замало.

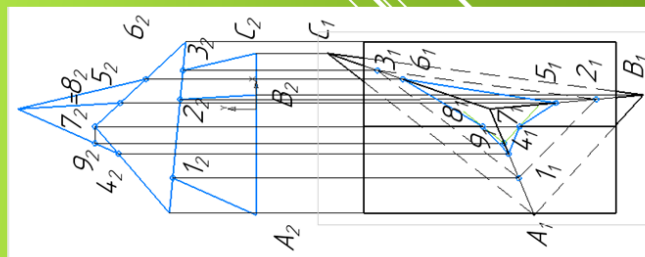
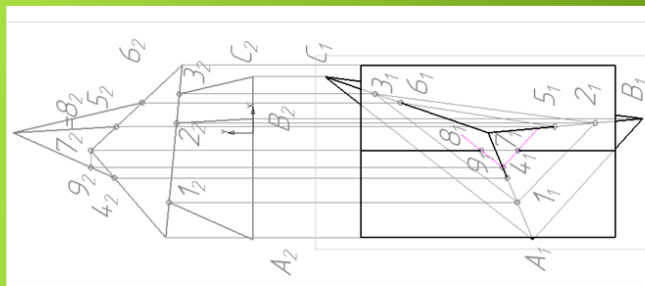
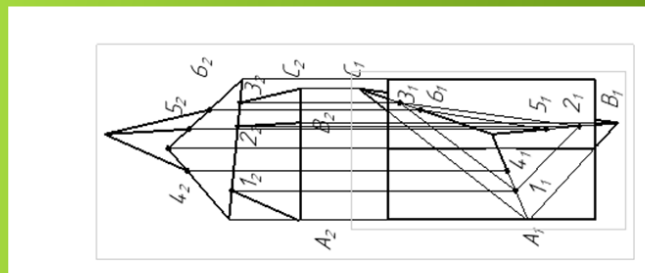
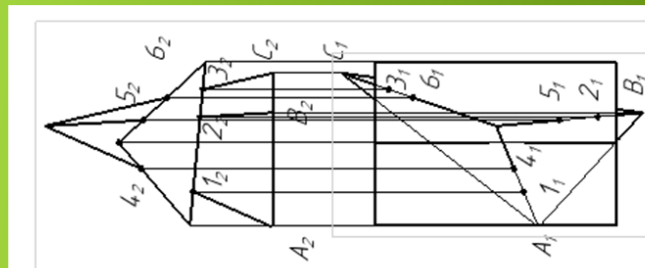
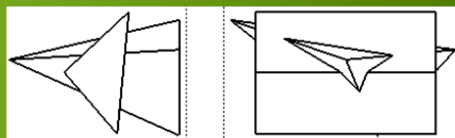


Точки 1, 2, 3, 4 – характерні, точки 5, 6 – проміжні.

Перетин гранних тіл



Розглянемо побудову лінії перетину прямої трикутної призми з трикутною пірамідою.



Оскільки бічні грані призми перпендикулярні площині Π_2 , знайдемо точки перетину ребер піраміди з гранями призми. Нижня грань призми перетинає піраміду по трикутнику $\Delta 123$

Для знаходження точок перетину верхнього ребра призми з пірамідою проведемо

Визначимо видимість лінії перетину.

Windows
перейдіть в розділ "Параметри".

Метод посередників

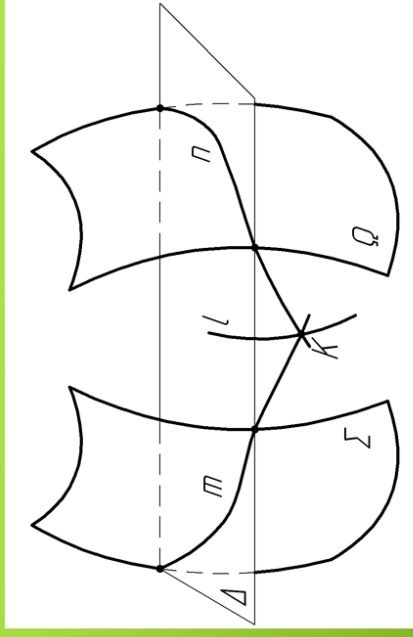
Основний метод побудови лінії перетину поверхонь — **метод поверхонь-посередників**.

Алгоритм графічних побудов :

- вибрати посередники, які перетинають задані поверхні за найбільш простими лініями: прямими або колами;
- провести посередник Δ та побудувати лінії його перетину з обома заданими поверхнями: $m = \Delta \cap \Sigma$, $n = \Delta \cap \Omega$;
- визначити точки перетину побудованих ліній $K = m \cap n$;
- ці точки належать лінії перетину заданих поверхонь $K \in l$;
- вибрати новий посередник та повторювати вищевказані дії, поки не буде одержано достатньо точок для побудови лінії перетину поверхонь;
- з'єднати одержані точки, враховуючи видимість окремих частин лінії перетину.

Посередники слід вибирати таким чином, щоб лінії їх перетину з обома поверхнями були найпростішими.

Побудову лінії перетину слід починати з визначення характерних точок, до яких відносяться точки на обрисах поверхонь, точки найвищі і найнижчі, крайні ліві і крайні праві на усіх проекціях.



Найбільш поширені поверхні-посередники:

- ❖ площини окремого положення;
- ❖ площини загального положення;
- ❖ сферичні поверхні
- ❖ сферичні поверхні зі змінним центром;
- ❖ циліндричні поверхні;
- ❖ конічні поверхні.

Активация Windows
Чтобы активировать Windows, перейдите в раздел "Параметры".

Посередники – площини окремого положення

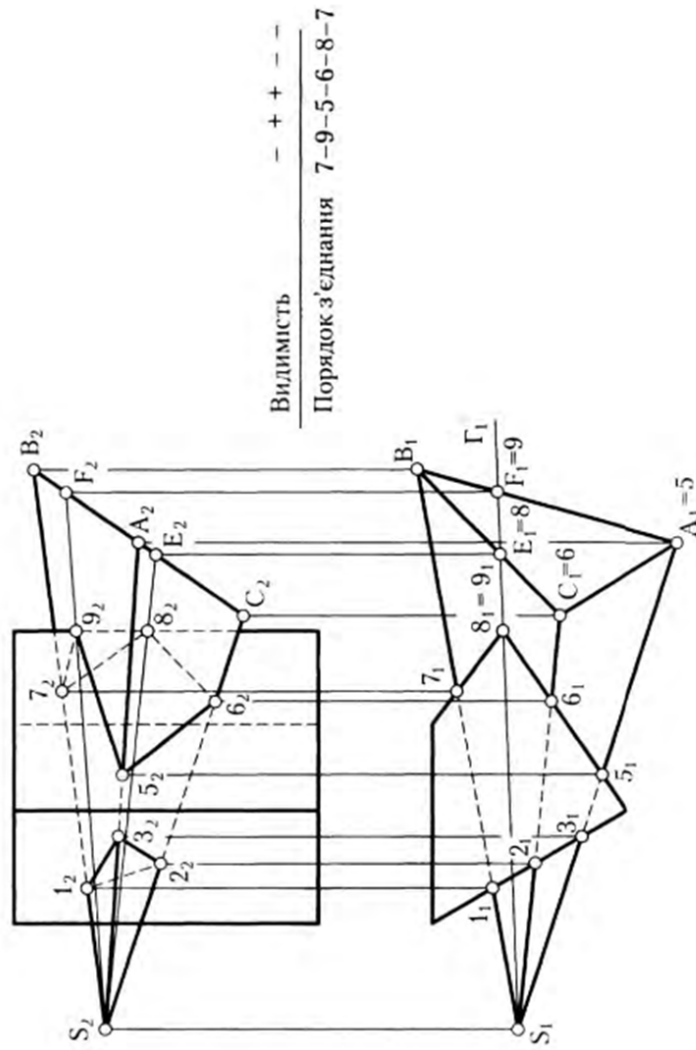
Приклад 1. Перетин призми з пірамідою.

Для побудови точок перетину правого бічного ребра призми з гранями піраміди застосована горизонтально-проектуюча площина Γ , яка проходить через вершину S піраміди. Вона перетинає піраміду по трикутнику ΔSEF .

Його сторони SE та SF перетинають ребро призми відповідно в точках 8 та 9.

Видимість відрізків лінії перетину визначають за видимістю вершин лінії перетину.

Дві видимі вершини з'єднує видима частина лінії перетину. Від невидимої вершини виходить невидима частина лінії перетину.

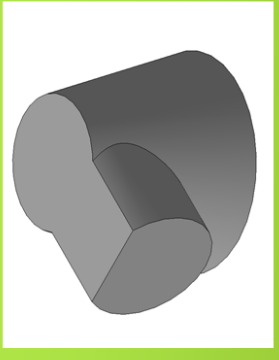
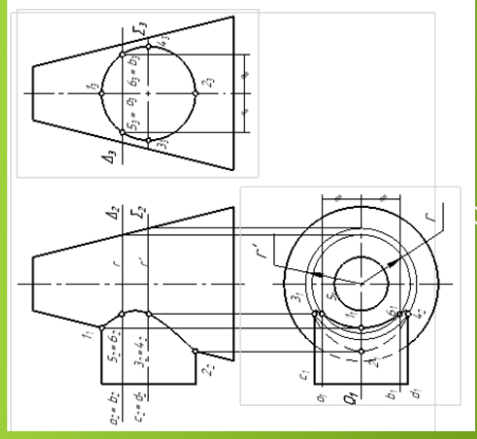
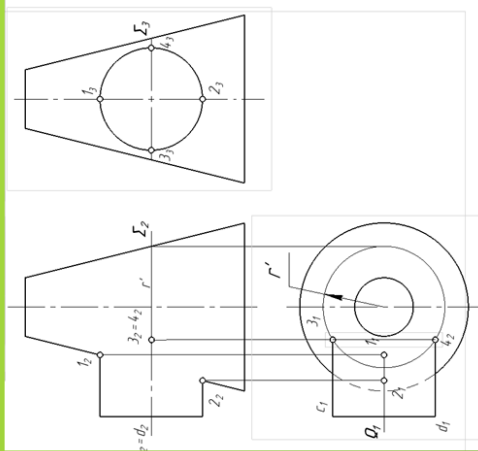
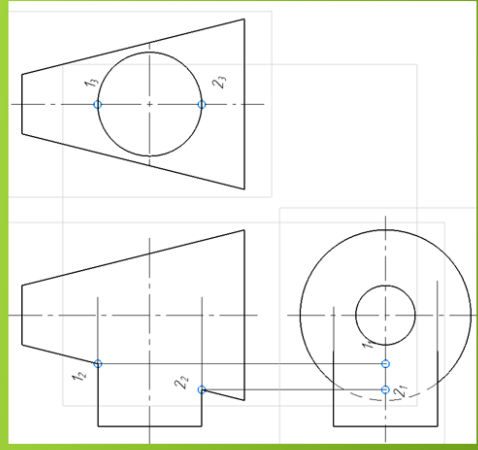
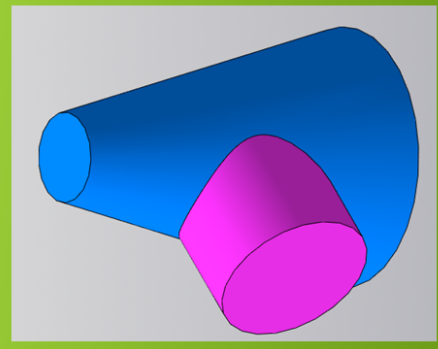


Для визначення порядку з'єднання вершин лінії перетину їх проєкціюють на основи призми та піраміди. Потім обходять їх одночасно в певному напрямі. Однакові на обох основах точки з'єднують.

Щоб активувати Wilson, перейдіть в розділ "Параметри".

Приклад 2. Перетин циліндра з конусом (проникання).

Побудуємо лінію перетину прямого кругового циліндра зі зрізаним конусом.



Обидві поверхні мають спільну фронтальну площину симетрії, тому одразу можна знайти точки перетину їх обрисних твірних на Π_2 .

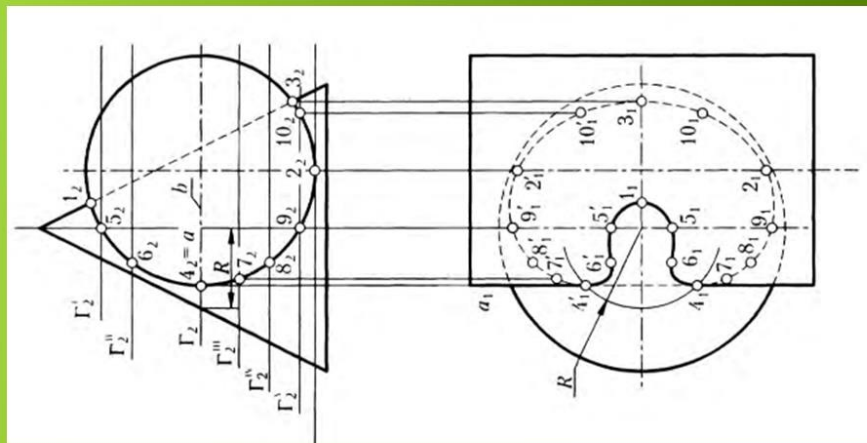
Для побудови точок на обрисі циліндра слід провести горизонтальну площину-посередник по його осі - площина Σ .

Проміжні точки можна визначити за допомогою горизонтальних площин різня, які перетинають конус по колах, а циліндр по твірних.

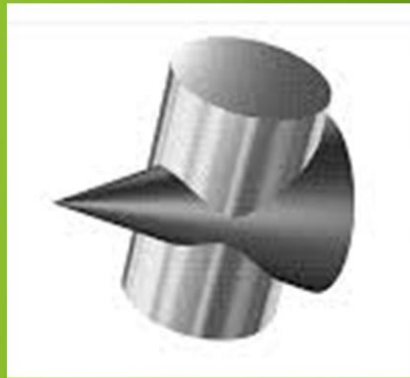
Активізуйте параметри, перейдіть в розділ "Параметри".



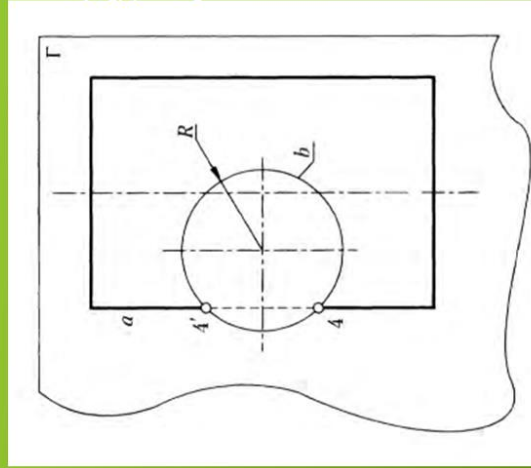
Приклад 3. Перетин циліндра з конусом (врубка).



Посередниками для побудови лінії перетину вибрано горизонтальні площини рівня. Вони перетинають конус по колах, а циліндр – по твірних. Це найпростіші лінії для цих поверхонь. Це фронтальні та профільні площини рівня перетинають конус по гіперболах, будувати які досить складно.



Площина Γ перетинає конус по колу радіуса R , а циліндр – по обрисних твірних.



Активация Windows
Чтобы активировать Windows, перейдите в раздел "Параметры".

Сферичні посередники

Умови застосування сферичних посередників.

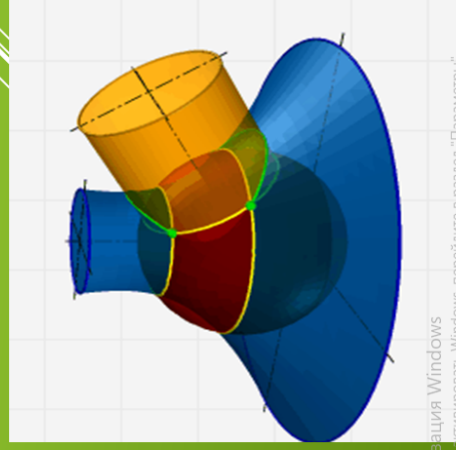
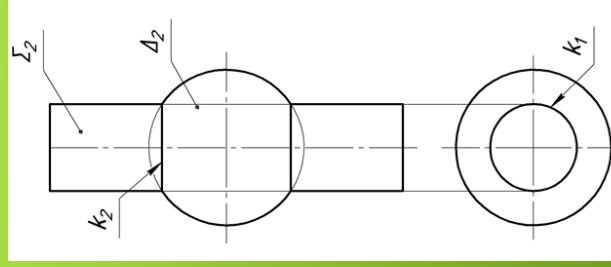
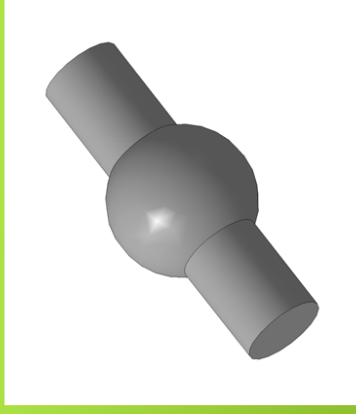
Застосування сферичних поверхонь як посередників при побудові лінії перетину поверхонь засновано на теоремі:

Дві поверхні обертання зі спільною віссю перетинаються по колах, кількість яких дорівнює кількості точок перетину твірних, які належать одній площині та розташовані по один бік від осі обертання.

Для використання сферичних поверхонь як посередників необхідна наявність наступних умов:

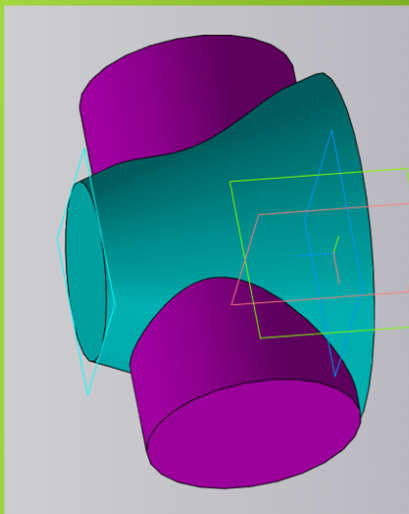
- обидві поверхні, що перетинаються, — поверхні обертання;
- вісі поверхонь перетинаються;
- вісі поверхонь паралельні одній площині проєкції.

Якщо центр сфери належить осі довільної поверхні обертання, то поверхні перетинаються по колах, які на одній площині проєкції зображуються відрізками прямих, що зручно для їх застосування як посередників при визначенні лінії перетину поверхонь обертання.

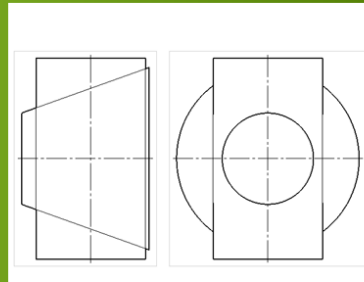


Активізація Windows
Щоб активувати Windows, перейдіть в розділ "Параметри".

Приклад 1. Перетин циліндра з конусом (проникання).



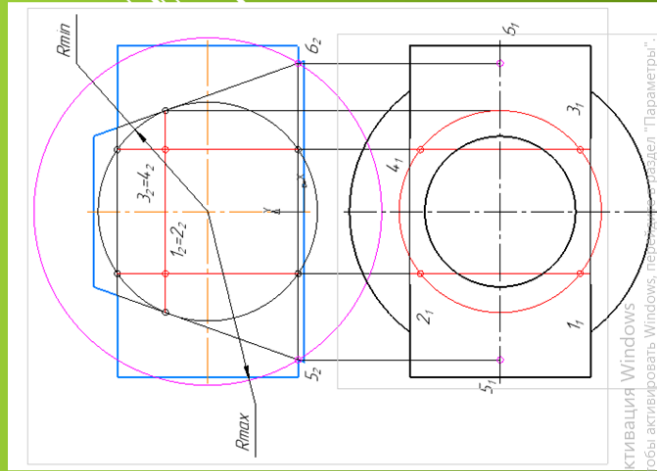
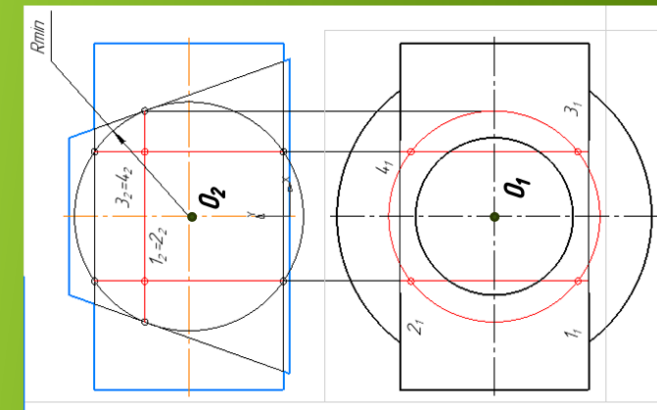
Графічна умова задачі.



Обидві поверхні: зрізаний конус і циліндр – поверхні обертання. Осі поверхонь перетинаються у точці O та паралельні площині проєкції Π_2 . Тому можна застосувати сферичні посередники. Центр сфер-посередників знаходиться в точці $O(O_1, O_2)$ перетину осей заданих поверхонь.

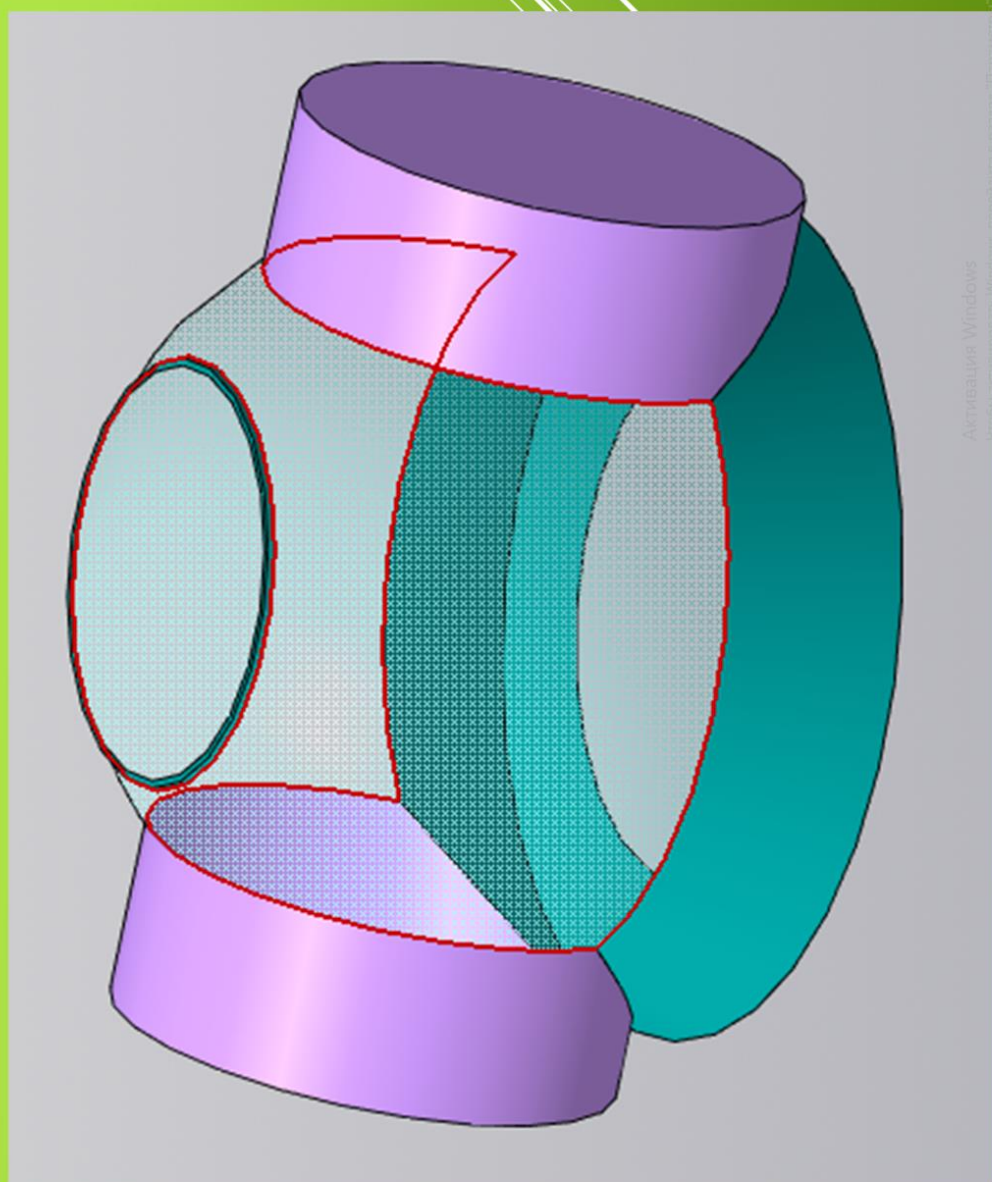
1. Сфера найменшого радіуса **Rmin** дотикається до поверхні конуса, а циліндр перетинає. Вона визначає точки 1, 2, 3 та 4.

2. Сфера найбільшого радіуса **Rmax** проходить через найбільш віддалену точку перетину об'єктів. Вона визначає точки 5 й 6.

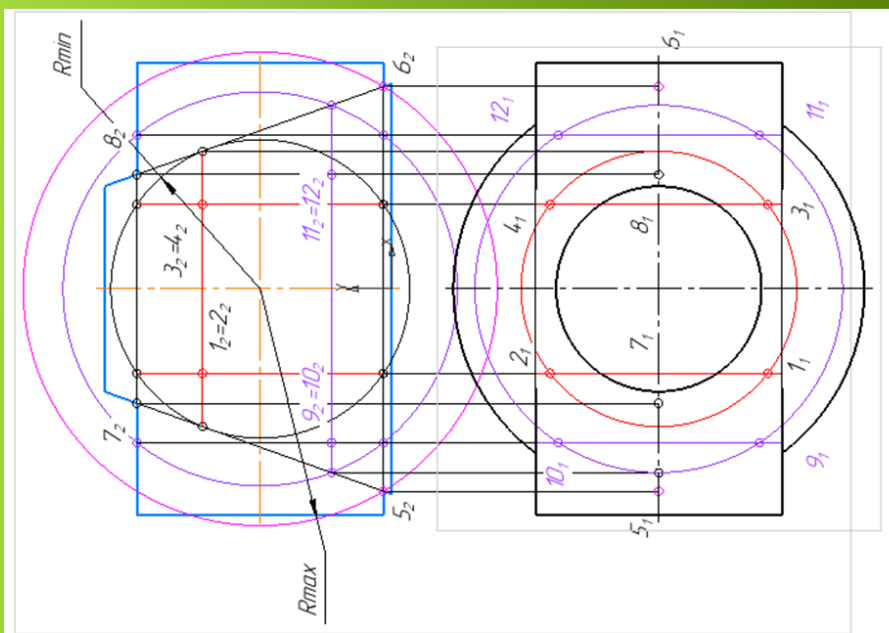


Активация Windows
чтобы активировать Windows, перейдите на раздел "Параметры".

Сфера проміжного радіуса



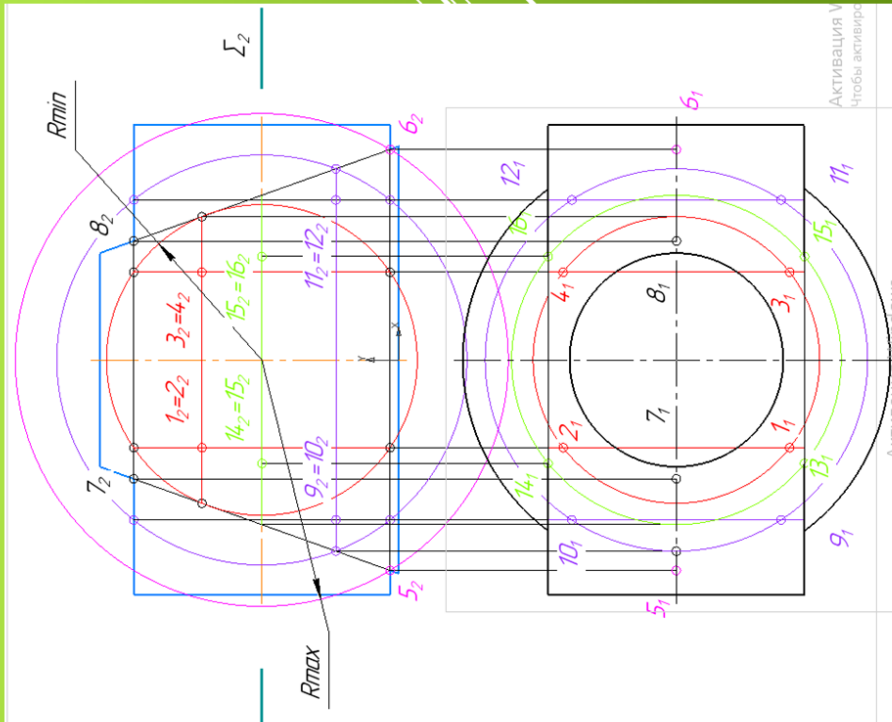
3. Точки 7 й 8 визначаються без застосування посередників як точки перетину обрисних твірних.



4. Сфера проміжного радіуса визначає точки 9, 10, 11 та 12.

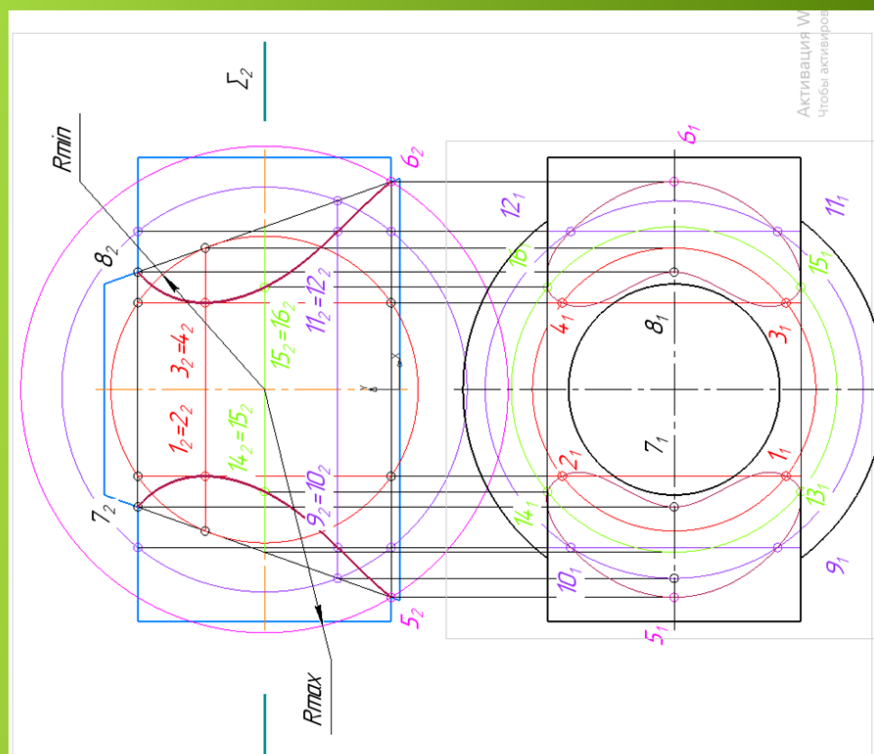
5. Для побудови точок на обрисі циліндра на Π_1 застосована горизонтальна площина посередник Σ , яка проходить через вісь циліндра.

Вона визначає точки 13, 14, 15 та 16.

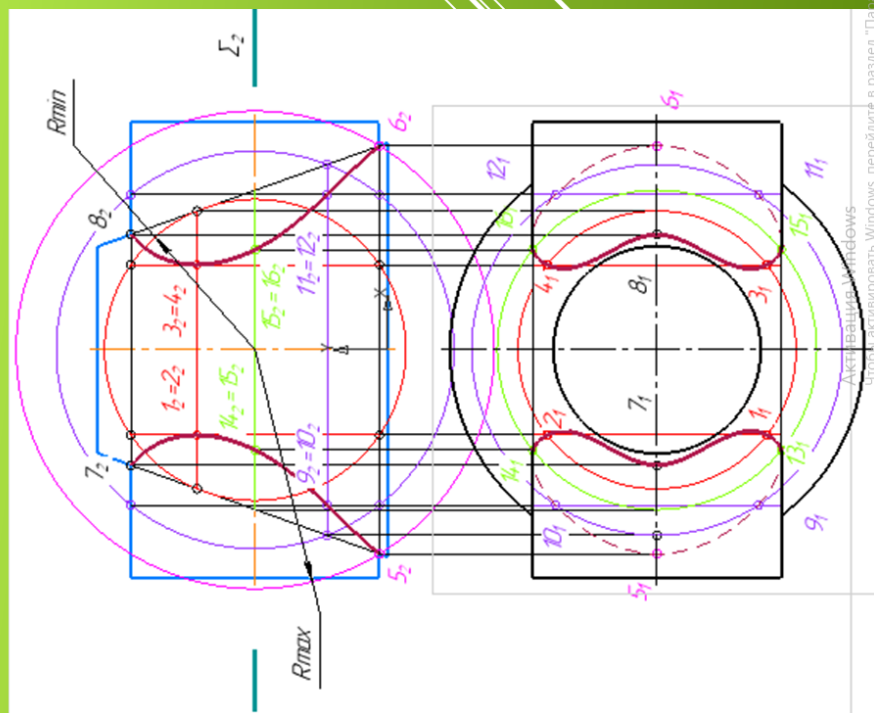


Активация Windows
Чтобы активировать Windows, перейдите в раздел "Параметры".

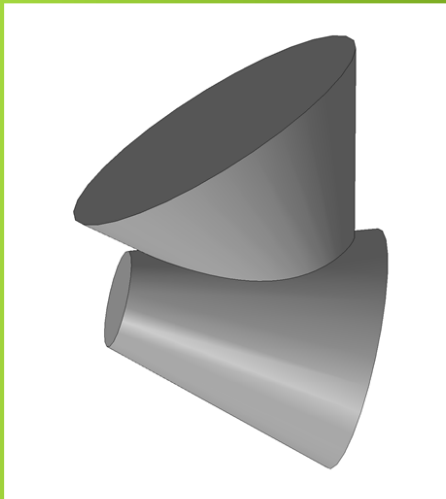
6. Побудовані точки з'єднаємо плавними кривими. На Π_2 криві видимі.



7. На площині Π_1 видимі ті частини кривих, які знаходяться у верхній частині циліндру.



Приклад 2. Перетин двох конусів (врубка).

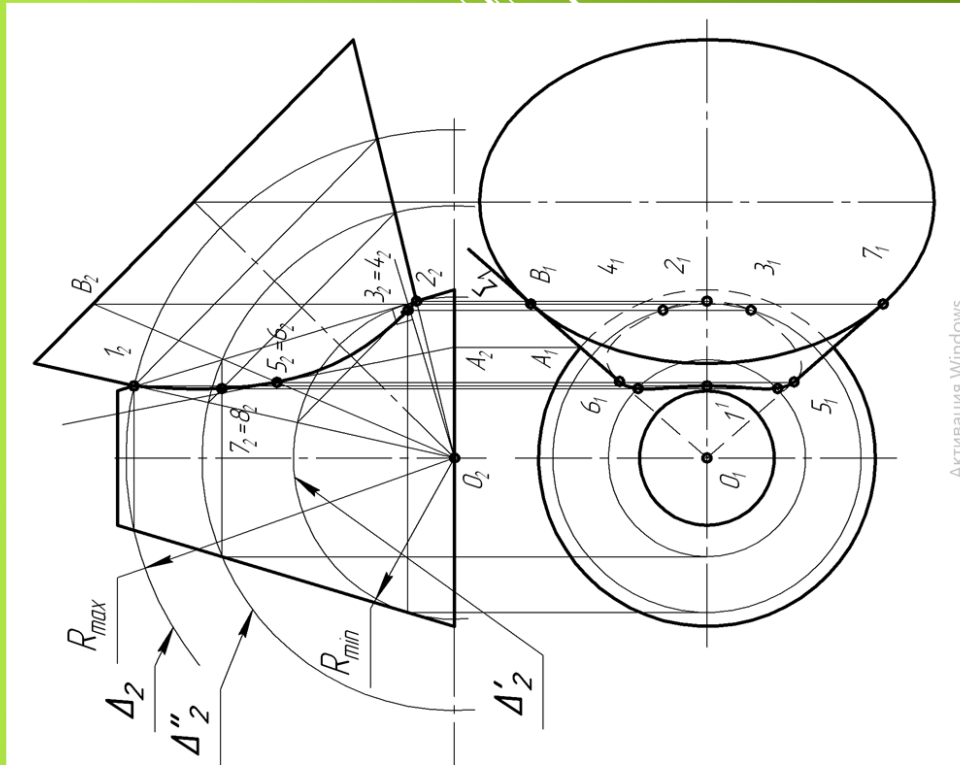


Обидві поверхні – поверхні обертання.
Осі поверхонь перетинаються у точці O , та паралельні площині Π_2 .
Тому для визначення точок лінії перетину застосуємо сферичні поверхні.
Центр сферичних посередників розташований у точці перетину осей - точці O .

Сфера мінімального радіуса дотикається до **більшої** поверхні – до зрізаного конуса. Вона визначає точки 3 та 4.
Сфера максимального радіуса проходить через найбільш віддалену точку перетину обрисів. Вона визначає точку 1.

Побудована також сфера проміжного радіуса, яка визначає точки 7 та 8.

Щоб визначити точки на обрисі конуса на Π_1 побудована допоміжна горизонтально-проекціююча площина Σ .



Активация Windows
Чтобы активировать Windows, перейдите в раздел "Параметры".

Ексцентричні сфери-посередники

Для побудови лінії перетину поверхонь обертання, осі яких не перетинаються, іноді застосовують метод сферичних-посередників зі змінним (миттєвим) центром (ексцентричні сфери-посередники).

Розглянемо цей метод на прикладі перетину зрізаного конуса з тором.

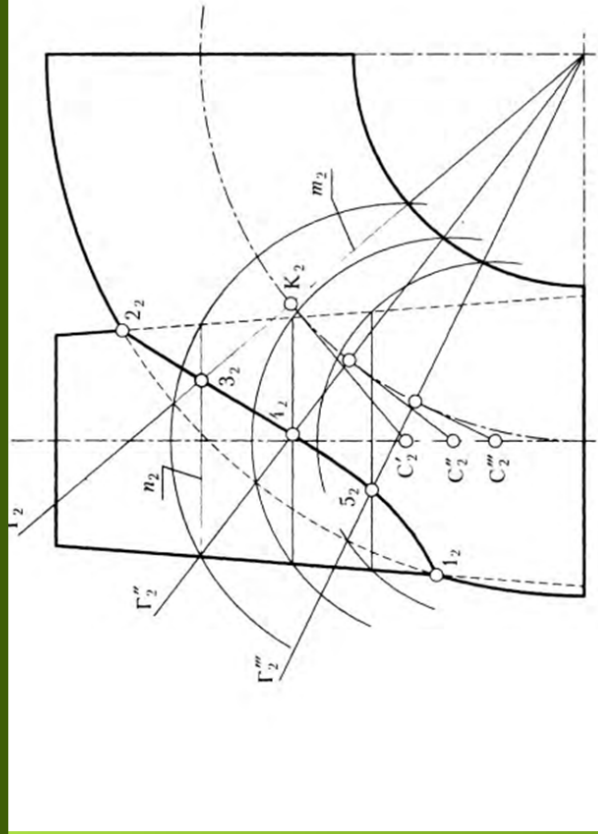
Поверхні мають спільну фронтальну площину симетрії, тому їх обрисні на Π_2 твірні перетинаються в точках 1 і 2.

Для визначення проміжних точок через вісь тора проводять фронтально-проекцію площини Γ , які перетинають тор по колах m . Центри K цих кіл розташовані на центровій лінії тора.

Точки лінії перетину знаходять за алгоритмом:

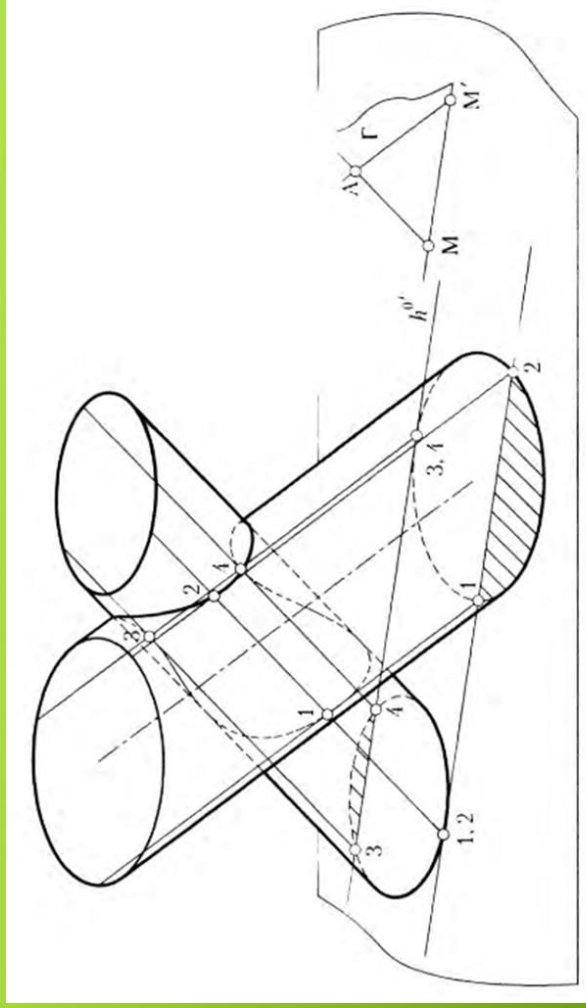
- провести перпендикуляр до площини кола через його центр K ;
- знайти точку перетину C перпендикуляру з віссю конуса;
- провести сферичний посередник, який перетинає тор по колу m , а конус - по колу n .
- перетин цих кіл визначає точку 3 перетину конуса з тором.

Аналогічно будуються інші проміжні точки лінії перетину.



Посередники – площини загального положення

Для визначення лінії перетину лінійчастих поверхонь іноді зручно застосувати площини загального положення як посередники. Наприклад, при побудові лінії перетину двох циліндрів загального положення застосовують площини, які паралельні твірним цих циліндрів. Вони перетинають кожний з них по твірним. Побудови у площинах загального положення виконувати складніше, але лінії перетину в цьому випадку простіше.



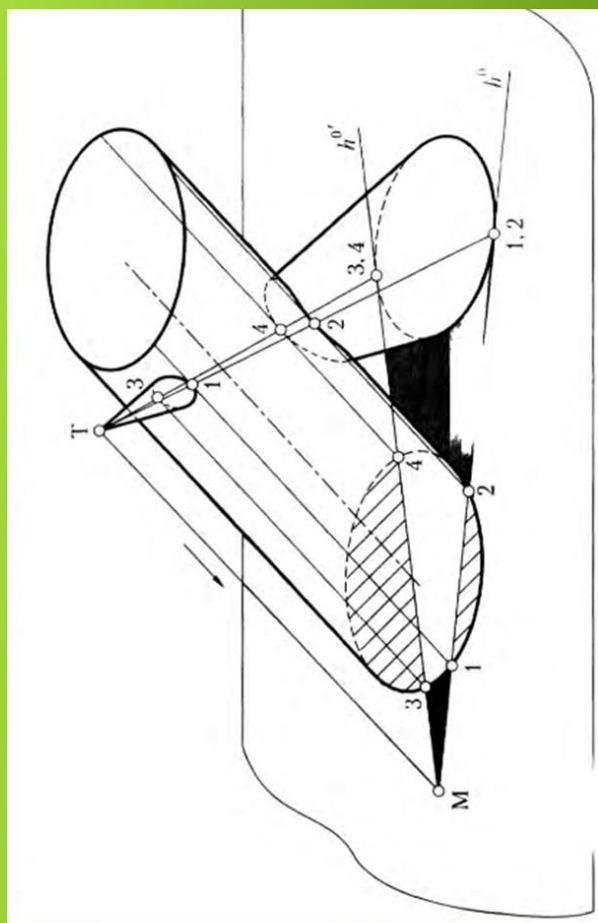
На **малюнку** побудована площина **Г**, яка паралельна до обох твірних. Визначена її лінія перетину **М-М'** з площиною **П₁**.

На основах циліндрів, які розташовані у площині **П₁**, проведені прямі, які дотичні до одної основи та перетинають іншу. Розташування зон неперетину визначає врізку. Через ці прямі проходять площини, що дотичні до циліндрів.

Будуємо твірні дотику та перетину посередника з циліндрами. Таким чином, визначаємо точки 1, 2, 3 та 4, які належать лінії перетину.

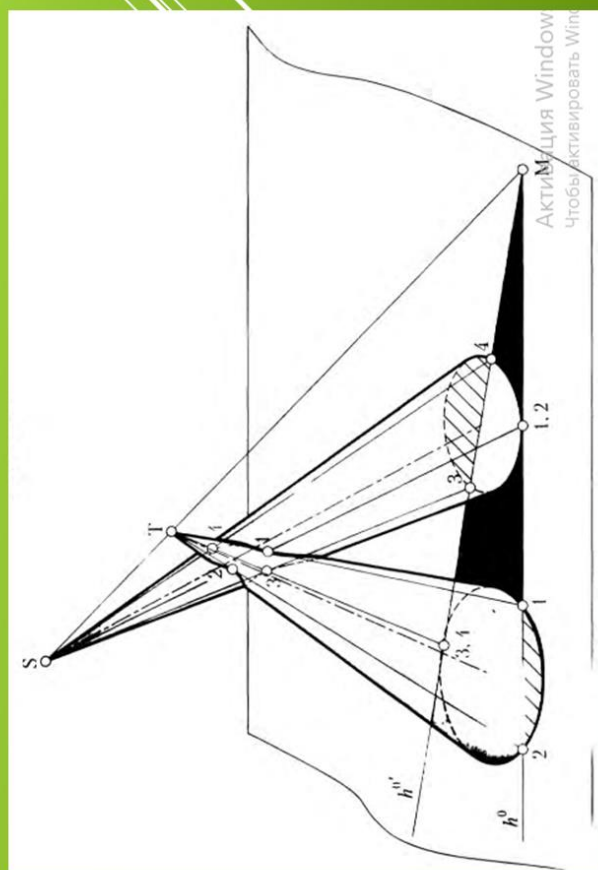
Активация Windows
Чтобы активировать Windows, перейдите в раздел "Параметры".

Ця методика застосовується при перетині циліндрів, призм, конусів та пірамід.



Площини-посередники проходять через вершину конуса паралельно твірній циліндра.

Площини-посередники проходять через пряму, що з'єднує вершини конусів.



Активация Windows
Чтобы активировать Windows, перейдите в раздел "Параметры".

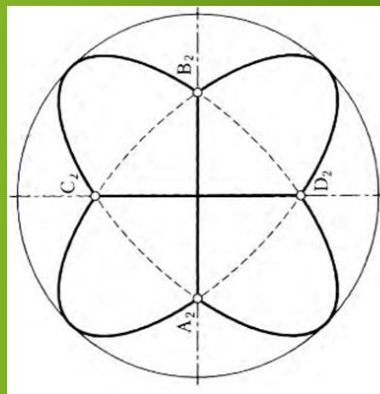
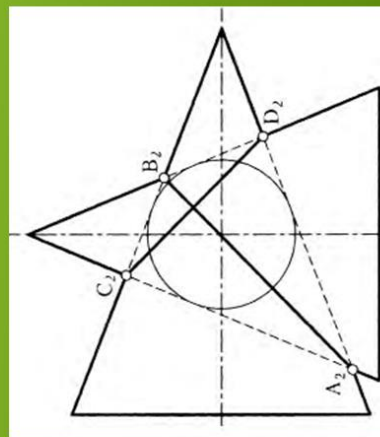


Окремі випадки перетину

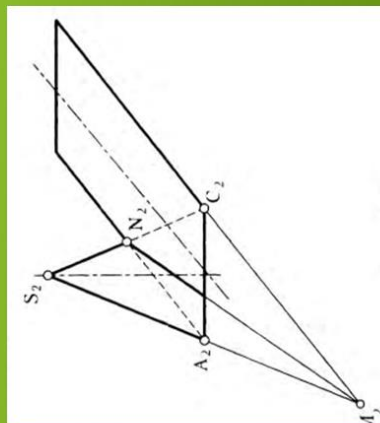
Теорема Монжа.

Якщо дві поверхні другого порядку описані навколо третьої поверхні другого порядку або вписані у неї, то лінія їх перетину розпадається на дві кривих другого порядку.

Два конуса описані навколо сфери.



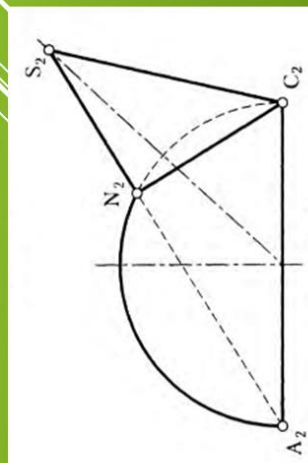
Конус і циліндр мають спільну основу.



Теорема про парність плоских перерізів.

Якщо дві поверхні другого порядку перетинаються по одній кривій другого порядку, то вони перетинаються й по іншій кривій другого порядку.

Сфера та конус мають спільне екваторіальне коло.

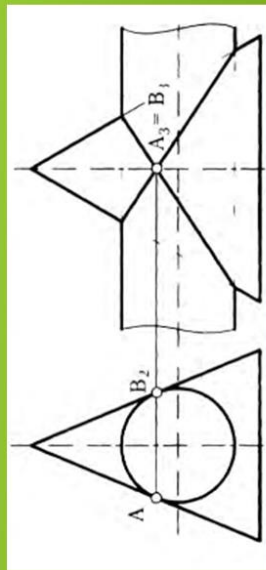


Активация Windows
Чтобы активировать Windows, перейдите в раздел "Параметры".

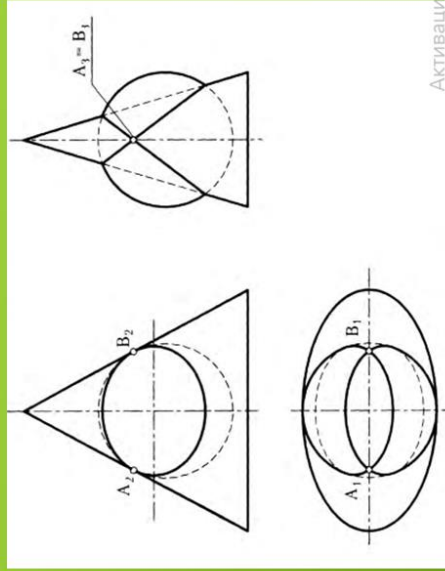
Теорема про подвійний дотик.

Якщо дві поверхні другого порядку дотикаються одна одній в двох точках, то лінія їх перетину розпадається на дві плоских кривих другого порядку, які проходять через ці точки.

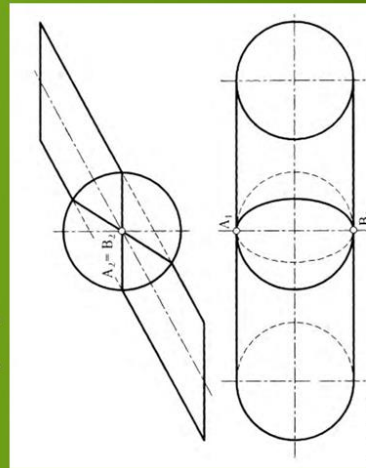
Конус та циліндр.



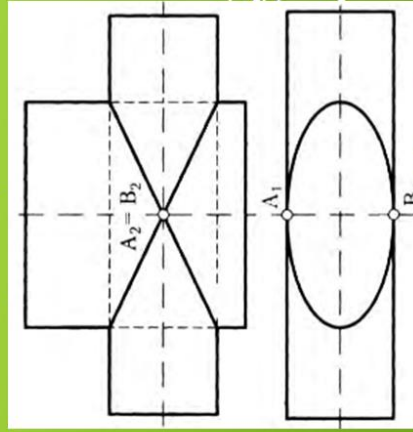
Еліптичний конус та сфера.



Похилий еліптичний циліндр та сфера.



Еліптичний циліндр та циліндр обертання.



A та **B** – точки дотику.

Активация Windows
чтобы активировать Windows, перейдите в раздел "Параметры".

Висновки

1. Форма лінії перетину поверхонь залежить від типів поверхонь та взаємного положення поверхонь відносно одна одної.
2. Для побудови точок лінії перетину поверхонь застосовуються поверхні-посередники.
3. Посередники вибираються таким чином, щоб лінії їх перетину з обома поверхнями були найпростішими.
4. Найпростіші посередники – площини окремого положення.
5. Для поверхонь обертання, осі яких перетинаються, застосовуються сферичні посередники.
6. Якщо осі поверхонь обертання мимобіжні, можуть застосовуватися ексцентрічні сферичні посередники.
7. Поверхні другого порядку в окремих випадках перетинаються за двома кривими другого порядку.

Активация Windows

Чтобы активировать Windows, перейдите в раздел "Параметры".

Питання та завдання для самоперевірки

1. Яким методом визначається лінія перетину двох поверхонь?
2. Наведіть перелік основних посередників, за допомогою яких будується лінія перетину двох поверхонь?
3. Як спрощується побудова лінії взаємного перетину поверхонь, якщо одна з поверхонь проекціююча?
4. Які умови застосування метода концентричних сфер для визначення лінії перетину двох поверхонь,?
5. У якому випадку лінія перетину поверхонь розпадається на дві плоскі криві?

ЛІТЕРАТУРА

1. Ванін В.В, Перевертун В.В, Надкернична Т.М. та ін. Інженерна та комп'ютерна графіка. К.: Вид.гр.BHV, 2009. — 400 с.
2. Михайленко В.Є., Ванін В.В., Ковальов С.М. Інженерна та комп'ютерна графіка. — К.: Каравела, 2012. — 363 с.
3. Бубенников А.В., Громов М.Я. Начертательная геометрия. — М.: Высш.шк., 1973. — 416 с.
4. Посвянский А.Д. Краткий курс начертательной геометрии. — М.: Высш.шк., 1970. — 264 с.
5. Хаскін А.М. Креслення. — К.: Вища шк., 1985. — 440 с.
6. Ванін В.В., Білицька Н.В., Гетьман О.Г., Міхлевська Н.В. Навчальні завдання з нарисної геометрії та інженерної графіки для програмованого навчання студентів немеханічних спеціальностей.— К.: НТУУ “КПІ”, 2020. — 64 с.

Навчальне видання

Білицька Надія Василівна.

Гетьман Олександра Георгіївна

ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА

РОЗДІЛ: НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

Курс лекцій для дистанційного режиму навчання

Відповідальний редактор: Гнітецька Тетяна Віталіївна

Рецензенти: Ботвіновська Світлана Іванівна

Башта Олена Трифонівна